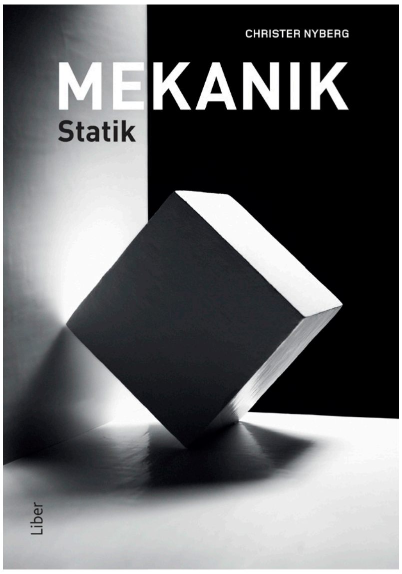
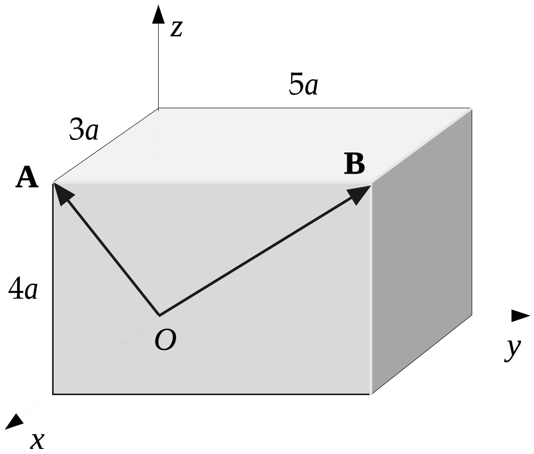


Mekanik Statik
Lösningar

av Christer Nyberg

Statik Kapitel A

LP A.1



I detta exempel är geometrin så enkel att de sökta vinklarna med lite eftertanke kan bestämmas nästan direkt. Vi följer ändå en metod som alltid fungerar. Vektorerna kan skrivas i komponentform:

$$\mathbf{A} = (3,\ 0,\ 4)a$$
$$\mathbf{B} = (3,\ 5,\ 4)a$$

Vinkeln θ mellan två vektorer ges av definitionen på skalärprodukt:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = AB\cos\theta \quad \Rightarrow$$

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{AB}$$

Insättning ger $$\cos\theta = \frac{(3,\ 0,\ 4)a\cdot(3,\ 5,\ 4)a}{\sqrt{(3^2+0^2+4^2)a^2}\sqrt{(3^2+5^2+4^2)a^2}}$$

$$\Rightarrow \quad \cos\theta = \frac{(3\cdot 3+0\cdot 5+4\cdot 4)a^2}{a\sqrt{25}\cdot a\sqrt{50}}$$

$$\Rightarrow \quad \cos\theta = \frac{25}{\sqrt{25\sqrt{2}\sqrt{25}}} \quad \Rightarrow \quad \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

b) Vinkeln fås direkt ur figuren: $\tan\beta = \dfrac{3}{4}$

c) Avståndet mellan spetsen på vektorn $\mathbf{B}$ och z-axeln är med hjälp

av Pythagoras sats $\sqrt{34}a$. Vinkeln fås direkt ur figuren: $\tan\alpha = \dfrac{\sqrt{34}}{4}$

d) En normalvektor till planet är

$$\mathbf{n} = \mathbf{A}\times\mathbf{B} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{n} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 3 & 0 & 4 \\ 3 & 5 & 4 \end{vmatrix} a^2 = (-20,\ 0,\ 15)a^2$$

Antag att den sökta vinkeln är φ. Vinkeln mellan denna normalvektor och z-axeln ges av skalärproduktdefinitionen:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right) = \frac{\mathbf{e}_z\cdot\mathbf{n}}{1\cdot|\mathbf{n}|} \quad \Rightarrow \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right) = \frac{(0,\ 0,\ 1)\cdot 5(-4,\ 0,\ 3)a^2}{5\sqrt{16+0+9}\,a^2} \quad \Rightarrow$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right) = \frac{3}{5} \quad \Rightarrow \quad \sin\varphi = \frac{3}{5}$$

Statik Problemsamling 1

LP 1.1 Acceleration är hastighetsändring per tid:

$$\dim g = \dim \frac{\text{hastighet}}{\text{tid}} = \frac{\mathrm{LT}^{-1}}{\mathrm{T}} = \mathrm{LT}^{-2}$$
$$\dim R = \mathrm{L}$$
$$\dim \tau = \mathrm{T}$$

a)
$$\dim 2\pi\sqrt{gR} = \dim 2\pi \cdot \dim \sqrt{gR} = 1\cdot(\dim gR)^{\frac{1}{2}}$$
$$= (\dim g \cdot \dim R)^{\frac{1}{2}} = (\mathrm{LT}^{-2}\cdot \mathrm{L})^{\frac{1}{2}} = (\mathrm{L}^2\mathrm{T}^{-2})^{\frac{1}{2}} = \mathrm{LT}^{-1}$$

b)
$$\dim 2\pi R\sqrt{g} = \dim 2\pi \cdot \dim R \cdot \dim\left(\sqrt{g}\right) = 1\cdot \mathrm{L}\cdot(\dim g)^{\frac{1}{2}}$$
$$= \mathrm{L}\cdot(\mathrm{LT}^{-2})^{\frac{1}{2}} = (\mathrm{L}^3\mathrm{T}^{-2})^{\frac{1}{2}} = \mathrm{L}^{\frac{3}{2}}\mathrm{T}^{-1}$$

c)
$$\dim 2\pi\sqrt{\frac{g}{R}} = \dim 2\pi \cdot \dim\sqrt{\frac{g}{R}} = 1\cdot\left(\dim\frac{g}{R}\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$= \left(\frac{\dim g}{\dim R}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{\mathrm{LT}^{-2}}{\mathrm{L}}\right)^{\frac{1}{2}} = (\mathrm{T}^{-2})^{\frac{1}{2}} = \mathrm{T}^{-1}$$

d)
$$\dim 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}} = \dim 2\pi \cdot \dim\sqrt{\frac{R}{g}} = 1\cdot\left(\dim\frac{R}{g}\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$= \left(\frac{\dim R}{\dim g}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{LT}^{-2}}\right)^{\frac{1}{2}} = (\mathrm{T}^{2})^{\frac{1}{2}} = \mathrm{T}$$

Uttrycket i d) har alltså dimensionen tid och kan vara rätt uttryck för satellitens omloppstid.

En helt annan kontroll gäller *storleksordningen*:

Om jordens omkrets är ungefär 4000 mil och tyngdaccelerationen sätts till $10\ \mathrm{m/s^2}$ så fås

$$2\pi\sqrt{\frac{R}{g}} = \sqrt{(2\pi)^2\frac{\text{Omkrets}}{g\cdot 2\pi}} \approx \sqrt{\frac{2\pi\cdot 40000000}{10}}\ \mathrm{s} \approx \sqrt{24000000}\ \mathrm{s} \approx 5000\ \mathrm{s} \approx 1.4\ \mathrm{h}$$

Det är ett rimligt värde för en satellit vars hastighet är av storleksordningen $10\ \mathrm{km/s}$.

LP 1.2 Termerna i en ekvation måste ha samma dimension. Vi kontrollerar därför varje term:

$$\dim\frac{1}{2}mv^2 = \dim m\cdot(\dim v)^2 = \mathrm{M}\cdot\left(\mathrm{LT}^{-1}\right)^2 = \mathrm{ML}^2\mathrm{T}^{-2}$$

$$\dim mgx = \dim m\cdot\dim g\cdot\dim x = \mathrm{M}\cdot\mathrm{LT}^{-2}\cdot\mathrm{L} = \mathrm{ML}^2\mathrm{T}^{-2}$$

$$\dim\frac{1}{2}kx = \dim k\cdot\dim x = \dim\left(\frac{\text{kraft}}{\text{längd}}\right)\cdot\dim(\text{längd})$$

$$= \dim(\text{kraft}) = \dim(\text{massa}\cdot\text{acceleration}) = \mathrm{MLT}^{-2}$$

De två första termerna har samma dimension. De motsvarar egentligen kinetisk energi respektive potentiell energi. Den tredje termen har en annan dimension och kan ej adderas till de andra.

LP 1.3 Vi bestämmer dimensionen för de storheter som ingår i formlerna och sedan undersöker vi varje given formels dimension.

$$\dim P = \dim(\text{effekt}) = \dim(\text{kraft})\cdot\dim(\text{hastighet})$$

$$= \dim(\text{massa}\cdot\text{acceleration})\cdot\dim(\text{hastighet})$$

$$= \mathrm{MLT}^{-2}\cdot\mathrm{LT}^{-1} = \mathrm{ML}^2\mathrm{T}^{-3}$$

$$\dim\rho = \dim(\text{densitet}) = \dim(\text{massa per volym}) = \mathrm{ML}^{-3}$$

a) $$\dim C(\rho PA)^2 = 1\cdot\left(\mathrm{ML}^{-3}\cdot\mathrm{ML}^2\mathrm{T}^{-3}\cdot\mathrm{L}^2\right)^2 = \mathrm{M}^4\mathrm{L}^2\mathrm{T}^{-6}$$

b) $$\dim C(\rho PA) = 1\cdot\mathrm{ML}^{-3}\cdot\mathrm{ML}^2\mathrm{T}^{-3}\cdot\mathrm{L}^2 = \mathrm{M}^2\mathrm{L}^1\mathrm{T}^{-3}$$

c) $$\dim C\left(\rho PA^{-1}\right)^{\frac{1}{3}} = 1\cdot\left(\frac{\mathrm{ML}^{-3}\cdot\mathrm{ML}^2\mathrm{T}^{-3}}{\mathrm{L}^2}\right)^{\frac{1}{3}} = \mathrm{M}^{\frac{2}{3}}\mathrm{L}^{-1}\mathrm{T}^{-1}$$

d) $$\dim C\left(\rho^{-1}PA^{-1}\right)^{\frac{1}{3}} = 1\cdot\left(\frac{\mathrm{ML}^2\mathrm{T}^{-3}}{\mathrm{ML}^{-3}\cdot\mathrm{L}^2}\right)^{\frac{1}{3}} = \mathrm{L}^1\mathrm{T}^{-1}$$

Endast uttrycket d) har samma dimension som hastighet.

LP 1.4 Dimensionen för (tyngd-)acceleration är

$$\dim g = \dim\left(\text{hastighetsändring per tid}\right) = \mathrm{LT}^{-2}$$

a) $\dim(gd)^2 = \left(\mathrm{LT}^{-2}\cdot\mathrm{L}\right)^2 = \mathrm{L}^2\mathrm{T}^{-4}$

b) $\dim\left(g\sqrt{d}\right) = \mathrm{LT}^{-2}\cdot\mathrm{L}^{\frac{1}{2}} = \mathrm{L}^{\frac{3}{2}}\mathrm{T}^{-2}$

c) $\dim\left(\sqrt{gd}\right) = \left(\mathrm{LT}^{-2}\cdot\mathrm{L}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\mathrm{L}^2\mathrm{T}^{-2}\right)^{\frac{1}{2}} = \mathrm{L}^1\mathrm{T}^{-1}$

Endast uttrycket c) har samma dimension som hastighet.

LP 1.5 Vi gör en

Ansats: $v = c\cdot m^x\cdot g^y\cdot h^z$ (1)

Dimensionsekvationen blir

$$\dim v = 1\cdot\dim(\text{massa})^x\cdot\dim(\text{acceleration})^y\cdot\dim(\text{längd})^z$$

eller $\mathrm{LT}^{-1} = \mathrm{M}^x\left(\mathrm{LT}^{-2}\right)^y\mathrm{L}^z$ (2)

$\Rightarrow$ $\mathrm{LT}^{-1} = \mathrm{M}^x\mathrm{L}^{y+z}\mathrm{T}^{-2y}$

Nu måste dimensionen vara lika på båda sidor. Exponenterna för M, L och T måste vara lika. Villkoret för rätt dimension är

$$\begin{aligned} \mathrm{M}: &\quad 0 = x \\ \mathrm{L}: &\quad 1 = y + z \\ \mathrm{T}: &\quad -1 = -2y \end{aligned} \qquad (3)$$

Lösningen är $x = 0,\quad y = \dfrac{1}{2},\quad z = \dfrac{1}{2}$

Insättning i ansatsen ger då

$v = c\cdot m^0\cdot g^{\frac{1}{2}}\cdot h^{\frac{1}{2}}$ (4)

eller $v = c\sqrt{gh}$

Den dimensionslösa konstanten c kan vi inte bestämma med denna metod.

Kommentar: Det rätta uttrycket för sluthastigheten är $v = \sqrt{2gh}$ och kan bestämmas med en energibetraktelse.

LP 1.6 Vi gör en

Ansats: $f = c \cdot l^x \cdot \rho^y \cdot S^z$ (1)

där f är strängens frekvens och c en dimensionslös konstant.

Motsvarande dimensionsekvationen blir

$$\dim(\text{antal per tid}) = 1 \cdot \dim(\text{längd})^x \cdot \dim(\text{massa per längd})^y \cdot \dim(\text{kraft})^z \tag{2}$$

Antal har dimensionen 1.

$$\dim(\text{tid}^{-1}) = [\dim(\text{längd})]^x \cdot [\dim(\text{massa per längd})]^y \cdot [\dim(\text{massa} \cdot \text{acceleration})]^z \tag{3}$$

$$\mathrm{T}^{-1} = \mathrm{L}^x \cdot [\mathrm{ML}^{-1}]^y \cdot [\mathrm{MLT}^{-2}]^z \tag{4}$$

$$\mathrm{T}^{-1} = \mathrm{M}^{y+z}\mathrm{L}^{x-y+z}\mathrm{T}^{-2z} \tag{5}$$

Nu måste dimensionen vara lika på båda sidor. Exponenterna för M, L och T måste vara lika. Villkoret för rätt dimension är

$$\begin{aligned} \text{M:} &\quad 0 = y + z \\ \text{L:} &\quad 0 = x - y + z \\ \text{T:} &\quad -1 = -2z \end{aligned} \tag{6}$$

Lösningen är $z = 1/2, \quad y = -1/2, \quad x = -1$

Insättning i ansatsen ger då

$$f = c \cdot l^{-1} \cdot \rho^{-\frac{1}{2}} \cdot S^{\frac{1}{2}}$$

eller $$\underline{\underline{f = \frac{c}{l}\sqrt{\frac{S}{\rho}}}}$$

Den dimensionslösa konstanten c kan vi inte bestämma med denna metod.

Kommentar: Resultatet visar att om strängens längd halveras för dubblas frekvensen. Frekvensen ökar med spännkraften och minskar med längddensiteten.

LP 1.7 Vi gör en

Ansats: $$V_{\text{pot}} = c \cdot k^x \cdot x^y \tag{1}$$

där V_{pot} är den potentiella energin i fjädern och c en dimensionslös konstant. Dimensionsekvationen blir

$$\dim(\text{energi}) = 1 \cdot \dim\left(\frac{\text{kraft}}{\text{längd}}\right)^x \cdot \dim(\text{längd})^y \tag{2}$$

Dimensionen för energi kan bestämmas om man kan en formel för ett annat energiuttryck, t ex kinetisk energi

$$\dim\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \left[\dim\left(\frac{\text{massa} \cdot \text{acceleration}}{\text{längd}}\right)\right]^x \cdot \left[\dim(\text{längd})\right]^y \tag{3}$$

$$\dim m \cdot (\dim v)^2 = \left(\frac{\mathrm{M} \cdot \mathrm{LT}^{-2}}{\mathrm{L}}\right)^x \cdot \mathrm{L}^y \tag{4}$$

$$\mathrm{M}\left(\mathrm{LT}^{-1}\right)^2 = \left(\mathrm{MT}^{-2}\right)^x \cdot \mathrm{L}^y \tag{5}$$

$$\Rightarrow \qquad \mathrm{ML}^2\mathrm{T}^{-2} = \mathrm{M}^x\mathrm{L}^y\mathrm{T}^{-2x} \tag{6}$$

Nu måste dimensionen vara lika på båda sidor. Exponenterna för M, L och T måste vara lika. Villkoret för rätt dimension är

$$\begin{aligned} \mathrm{M}: &\quad 1 = x \\ \mathrm{L}: &\quad 2 = y \\ \mathrm{T}: &\quad -2 = -2x \end{aligned} \tag{7}$$

Lösningen är $x = 1, \quad y = 2$

Insättning i ansatsen ger då

$$V_{\text{pot}} = c \cdot kx^2 \tag{8}$$

Den dimensionslösa konstanten c kan vi inte bestämma med denna metod.

Kommentar: Det rätta uttrycket för energin är $V_{\text{pot}} = \dfrac{1}{2}kx^2$ och kommer att härledas senare.

LP 1.8 Vi gör en

Ansats: $$\eta = c \cdot E^x \cdot u^y \cdot q^z \cdot g^v \tag{1}$$

där η är den inre verkningsgraden och c en dimensionslös konstant. Verkningsgrad är ett förhållande mellan nyttig effekt och tillförd effekt. Verkningsgrad har därför dimensionen 1. Dimensionsekvationen blir

$$1 = 1 \cdot \dim(\frac{\text{energi}}{\text{massa}})^x \cdot \dim(\text{fart})^y \cdot \dim(\frac{\text{massa}}{\text{tid}})^z \cdot \dim(\text{acceleration})^w \tag{2}$$

Dimensionen för energi kan bestämmas om man kan en formel för ett annat energiuttryck, t ex kinetisk energi $T = \frac{1}{2}mv^2$.

$$1 = \left[\dim\left(\frac{1}{2}v^2\right)\right]^x \cdot [\dim v]^y \cdot \left[\dim\left(\frac{\text{massa}}{\text{tid}}\right)\right]^z \cdot [\dim(\text{acceleration})]^w \tag{3}$$

$$1 = [\mathrm{L}^2\mathrm{T}^{-2}]^x \cdot [\mathrm{LT}^{-1}]^y \cdot [\mathrm{MT}^{-1}]^z \cdot [\mathrm{LT}^{-2}]^w \tag{4}$$

$$1 = \mathrm{M}^z\mathrm{L}^{2x+y+w}\mathrm{T}^{-2x-y-z-2w} \tag{5}$$

Nu måste dimensionen vara lika på båda sidor. Exponenterna för M, L och T måste vara lika. Villkoret för rätt dimension är

$$\begin{aligned} \text{M:} \quad & 0 = z \\ \text{L:} \quad & 0 = 2x + y + w \\ \text{T:} \quad & 0 = -2x - y - z - 2w \end{aligned} \tag{6}$$

Lösningen är $z = 0, \quad w = 0, \quad y = -2x$

Insättning i ansatsen ger då

$$\eta = c \cdot E^x \cdot u^{-2x} \tag{7}$$

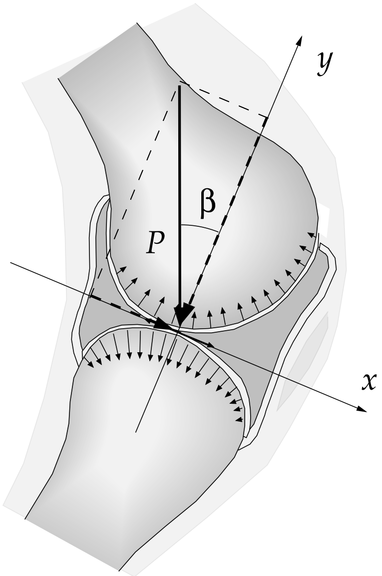
Det går inte att bestämma x. Det betyder att alla funktioner av för hållandet $\frac{E}{u^2}$ är tillåtna. Resultatet är alltså att uttrycket för verkningsgraden, bestämt med dimensionsanalys) kan skrivas

$$\underline{\underline{\eta = f\left(\frac{E}{u^2}\right)}}$$

Den dimensionslösa konstanten c kan inte bestämmas med den här metoden.

Statik Problemsamling 2

LP 2.1



Kraften har storleken P. Dess riktning relativt koordinataxlarna är också känd och given av vinkeln β. Kraftens x-komponent är då $P\sin\beta$, medan y-komponenten är $-P\cos\beta$. Vi kan skriva kraften på vektorform:

$$\mathbf{P} = P_x\mathbf{e}_x + P_y\mathbf{e}_y = P\sin\beta\,\mathbf{e}_x - P\cos\beta\,\mathbf{e}_y$$

eller komponentform

$$\mathbf{P} = (P_x, P_y, 0) = (P\sin\beta, -P\cos\beta, 0)$$

Men β är given: $\tan\beta = \dfrac{3}{4}$ $\Rightarrow$

$$\sin\beta = \frac{3}{5} \quad \text{och} \quad \cos\beta = \frac{3}{5}$$

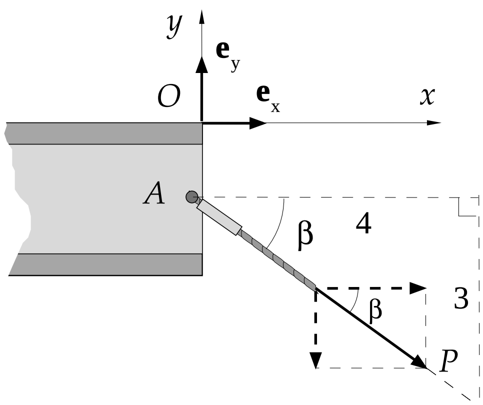
$$\Rightarrow \qquad \mathbf{P} = P\cdot\frac{3}{5}\mathbf{e}_x - P\cdot\frac{4}{5}\mathbf{e}_y$$

Storleken $P = 800$ N är också given:

$$F_x = P\sin\beta = 800\cdot\frac{3}{5}\,\text{N} = \underline{\underline{480\ \text{N}}}$$

$$F_y = -P\cos\beta = -800\cdot\frac{4}{5}\ \text{N} = \underline{\underline{-640\ \text{N}}}$$

LP 2.2



Kraften har storleken P. Dess riktning är också känd och given av vinkeln β. Kraftens x-komponent är då $P\cos\beta$, medan y-komponenten är $-P\sin\beta$. Vi kan skriva:

$$\mathbf{P} = P_x\mathbf{e}_x + P_y\mathbf{e}_y = P\cos\beta\mathbf{e}_x - P\sin\beta\mathbf{e}_y$$

eller

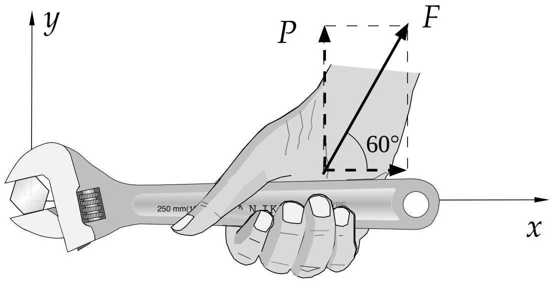
$$\mathbf{P} = (P_x, P_y, 0) = (P\cos\beta, -P\sin\beta, 0)$$

Men β är given $\quad\Rightarrow\quad \mathbf{P} = P\cdot\dfrac{4}{5}\mathbf{e}_x - P\cdot\dfrac{3}{5}\mathbf{e}_y$

Storleken $P = 10$ kN är också given $\quad\Rightarrow\quad \mathbf{P} = \left(\dfrac{40}{5}\mathbf{e}_x - \dfrac{30}{5}\mathbf{e}_y\right)$ kN

$$\Rightarrow \qquad \underline{\underline{\mathbf{P} = (8\,\mathbf{e}_x - 6\,\mathbf{e}_y)\ \text{kN}}}$$

LP 2.3



Vi vet att y-komponenten av kraften **F** är P, alltså

$$P = F\sin 60° \quad \Rightarrow \quad F = \frac{P}{\sin 60°}$$

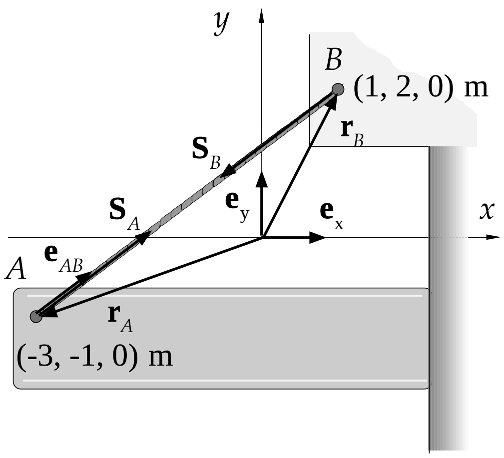
$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{F = \frac{2P}{\sqrt{3}}}}$$

x-komponenten av kraften **F** blir

$$F_x = F\cos 60° \quad \Rightarrow \quad F_x = F\cdot\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{F_x = \frac{P}{\sqrt{3}}}}$$

LP 2.4



Vektorn mellan A och B är

$$\mathbf{r}_{AB} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A$$

$$= (1,\ 2,\ 0)\ \text{m} - (-3\ ,-1,\ 0)\ \text{m} = (\ 4\ ,\ 3,\ 0)\ \text{m}$$

Kraftens riktning ges av enhetsvektorn

$$\mathbf{e}_{AB} = \frac{\mathbf{r}_{AB}}{|\mathbf{r}_{AB}|} = \frac{1}{\sqrt{16+9}}(\ 4\ ,\ 3,\ 0) = \frac{1}{5}(\ 4\ ,\ 3,\ 0)$$

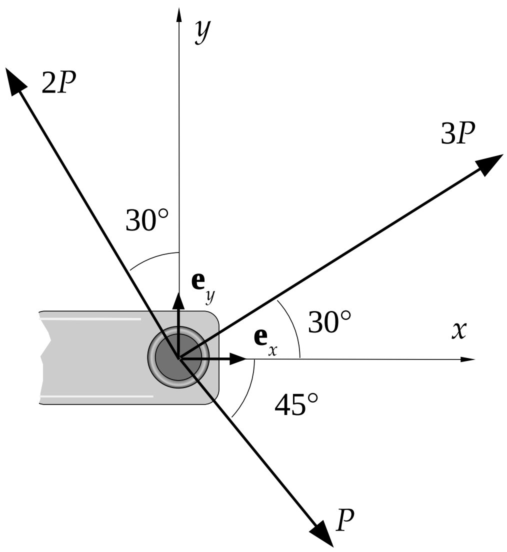
Kraften S i linan har storleken $50\ \text{N}$.

Kraften på respektive ögla är

$$\mathbf{S}_A = S\mathbf{e}_{AB} = \frac{50}{5}(\ 4\ ,\ 3,\ 0)\ \text{N} = \underline{\underline{10(\ 4\ ,\ 3,\ 0)\ \text{N}}}$$

$$\mathbf{S}_B = -S\mathbf{e}_{AB} = \underline{\underline{-10(\ 4\ ,\ 3,\ 0)\ \text{N}}}$$

LP 2.5



Krafterna har samma angreppspunkt O. De kan skrivas på vektorform

$$\mathbf{F}_1 = P\cos 45°\mathbf{e}_x - P\sin 45°\mathbf{e}_y$$

$$\mathbf{F}_2 = 3P\cos 30°\mathbf{e}_x + 3P\sin 30°\mathbf{e}_y$$

$$\mathbf{F}_3 = -2P\sin 30°\mathbf{e}_x + 2P\cos 30°\mathbf{e}_y$$

Detta kan också skrivas

$$\mathbf{F}_1 = P\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{e}_x - P\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{e}_y$$
$$\mathbf{F}_2 = 3P\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{e}_x + 3P\cdot\frac{1}{2}\mathbf{e}_y$$
$$\mathbf{F}_3 = -2P\cdot\frac{1}{2}\mathbf{e}_x + 2P\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{e}_y$$

eller

$$\mathbf{F}_1 = \frac{\sqrt{2}P}{2}\left(\mathbf{e}_x - \mathbf{e}_y\right)$$
$$\mathbf{F}_2 = \frac{3P}{2}\left(\sqrt{3}\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y\right)$$
$$\mathbf{F}_3 = P\left(-\mathbf{e}_x + \sqrt{3}\mathbf{e}_y\right)$$

Kraftsumman är

$$\mathbf{F} = \sum \mathbf{F}_k = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3$$

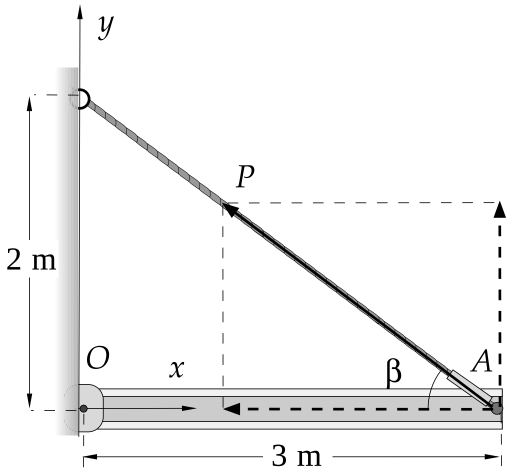
$$= \left(\frac{\sqrt{2}P}{2} + \frac{3\sqrt{3}P}{2} - P\right)\mathbf{e}_x + \left(-\frac{\sqrt{2}P}{2} + \frac{3P}{2} + \sqrt{3}P\right)\mathbf{e}_y$$

eller

$$\mathbf{F} = \frac{P}{2}\left(\sqrt{2} + 3\sqrt{3} - 2\right)\mathbf{e}_x + \left(-\sqrt{2} + 3 + 2\sqrt{3}\right)\mathbf{e}_y$$

Kraftresultanten är denna kraftsumma med angreppspunkt i origo. Den kan ersätta det givna kraftsystemet. *Kraftsumman* har ingen angreppspunkt!

LP 2.6



Trådens längd är enligt Pythagoras sats

$$\sqrt{2^2+3^2}\ \text{m} = \sqrt{13}\ \text{m}$$

Vinkeln β är bestämd:

$$\cos\beta = \frac{3}{\sqrt{13}} \quad \text{och} \quad \sin\beta = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

Kraftens komponenter blir då

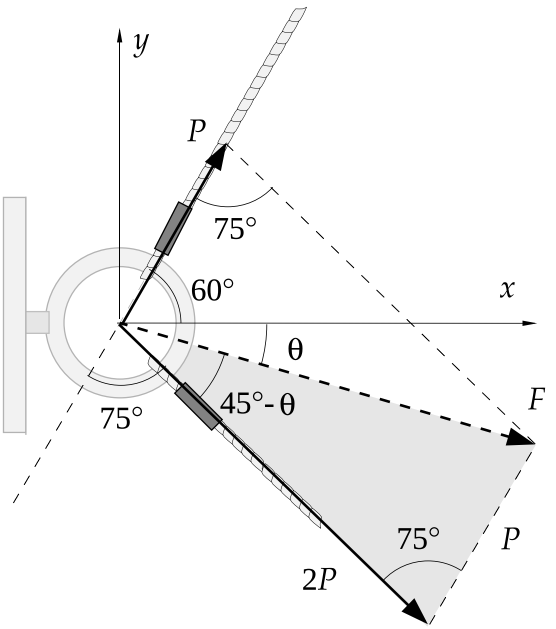
$$F_x = \mathbf{F}\cdot\mathbf{e}_x = -P\cos\beta = -130\cdot\frac{3}{\sqrt{13}}\ \text{N}$$

$$F_y = \mathbf{F}\cdot\mathbf{e}_y = P\sin\beta = 130\cdot\frac{2}{\sqrt{13}}\ \text{N}$$

$$\underline{\underline{F_x = -30\sqrt{13}\ \text{N}}}$$

$$\underline{\underline{F_y = 20\sqrt{13}\ \text{N}}}$$

LP 2.7



Kalla kraftresultantens storlek F. Vinkeln θ söks. Eftersom $\alpha+\beta=105°$ kan vinkeln $75°=180°-105°$ i figuren identifieras.

Betrakta den gråmarkerade krafttriangeln! Kraftresultantens storlek fås med cosinus-satsen:

$$F=\sqrt{P^2+(2P)^2-2P\cdot(2P)\cos 75°}$$

$$\Rightarrow \qquad F=P\sqrt{5-4\cos 75°}$$

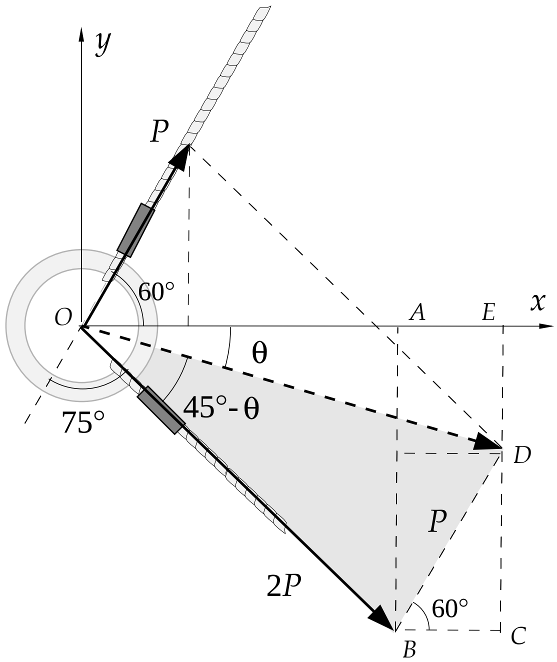
Vinkeln θ kan bestämmas med sinus-satsen:

$$\frac{\sin 75°}{F}=\frac{\sin(45°-\theta)}{P} \quad \Rightarrow$$

$$\sin(45°-\theta)=\frac{P\sin 75°}{F} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad \sin(45°-\theta)=\frac{\sin 75°}{\sqrt{5-4\cos 75°}} \qquad \Rightarrow \qquad 45°-\theta=\arcsin\frac{\sin 75°}{\sqrt{5-4\cos 75°}}$$

$$\Rightarrow \qquad \underline{\underline{\theta=45°-\arcsin\frac{\sin 75°}{\sqrt{5-4\cos 75°}}}}$$



Alternativt kan vinkeln θ kan bestämmas genom att bestämma längden av sidorna ED och OE i figuren.

AB har längden $\dfrac{2P}{\sqrt{2}}$

CD har längden $\dfrac{\sqrt{3}P}{2}$

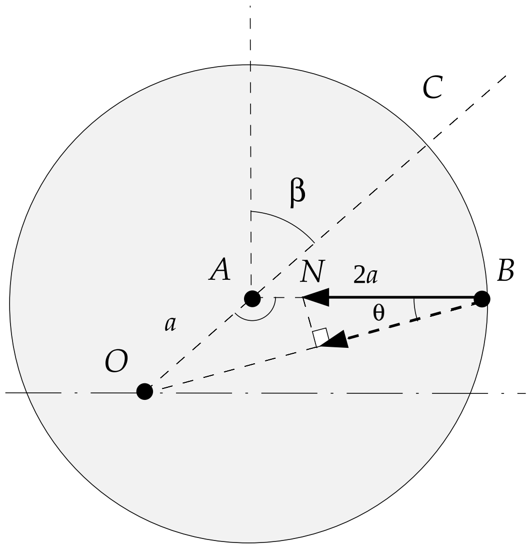
BC har längden $\dfrac{P}{2}$

$$\tan\theta=\frac{\dfrac{2P}{\sqrt{2}}-\dfrac{\sqrt{3}P}{2}}{\dfrac{2P}{\sqrt{2}}+\dfrac{P}{2}}$$

$$\Rightarrow$$

$$\underline{\underline{\tan\theta=\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}+1}}}$$

LP 2.8



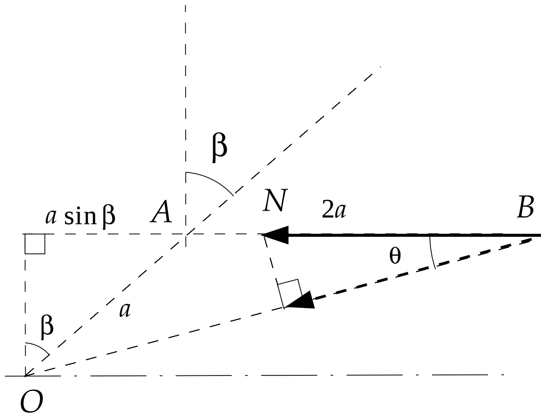
Projicera normalkraften N på linjen OB. Komponenten är $N\cos\theta$.

Vinkeln CAB är $\dfrac{\pi}{2}-\beta$.

Vinkeln OAB är $\pi-\left(\dfrac{\pi}{2}-\beta\right)$.

Vinkeln θ kan bestämmas med sinussatsen. Man kan också direkt få cosinus för vinkeln med hjälp av den undre figuren

$$\cos\theta=\frac{2a+a\sin\beta}{\sqrt{(2a+a\sin\beta)^2+(a\cos\beta)^2}}$$



$\Rightarrow$

$$\cos\theta=\frac{2+\sin\beta}{\sqrt{4+\sin^2\beta+4\sin\beta+\cos^2\beta}}$$

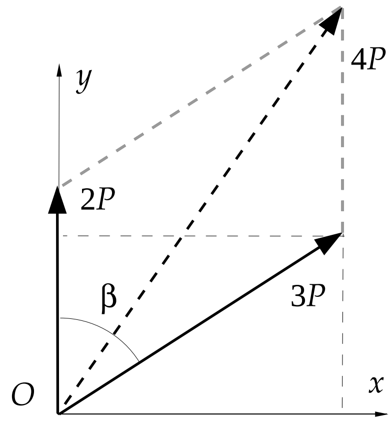
$$\Rightarrow \qquad \cos\theta=\frac{2+\sin\beta}{\sqrt{5+4\sin\beta}}$$

Kraftkomponenten blir alltså

$$\underline{\underline{N\cos\theta=\frac{2+\sin\beta}{\sqrt{5+4\sin\beta}}N}}$$

Observera att här är N den givna kraften. Det är alltså inte enheten newton som avses.

LP 2.9



Krafterna kan förskjutas längs sina verkningslinjer så att båda angriper i samma punkt O, som är öglans centrum. Krafter som har samma angreppspunkt får vektoradderas till en kraftresultant.

Inför ett koordinatsystem $Oxyz$ enligt figuren!
Kraftresultanten angriper i O och är

$$\mathbf{F} = \sum \mathbf{F}_k = (0,\, 2P,\, 0) + (3P\sin\beta,\, 3P\cos\beta,\, 0)$$
$$= (3P\sin\beta,\, 2P + 3P\cos\beta,\, 0)$$

Kraftresultantens storlek är $\quad |\mathbf{F}| = F = \sqrt{(3P\sin\beta)^2 + (2P + 3P\cos\beta)^2}$

Denna storlek skall enligt text vara $\quad 4P$

vilket ger ekvationen $\quad \sqrt{(3P\sin\beta)^2 + (2P + 3P\cos\beta)^2} = 4P$

kvadrera! $\quad \Rightarrow \quad (3P\sin\beta)^2 + (2P + 3P\cos\beta)^2 = 16P^2$

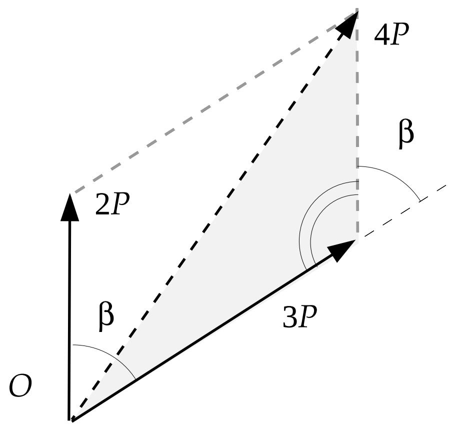
dividera med P ! $\quad \Rightarrow \quad 9\sin^2\beta + 4 + 9\cos^2\beta + 12\cos\beta = 16$

$\Rightarrow \quad 9(\sin^2\beta + \cos^2\beta) + 12\cos\beta = 12$

trigonometriska ettan $\quad \Rightarrow \quad 9 + 12\cos\beta = 12 \quad \Rightarrow \quad 12\cos\beta = 3$

$$\Rightarrow \quad \cos\beta = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\beta = \arccos\frac{1}{4}}}$$

Alternativ lösning:



Vi känner tre sidor i en kraft-triangel. Vinkeln β kan då bestämmas med cosinus-satsen:

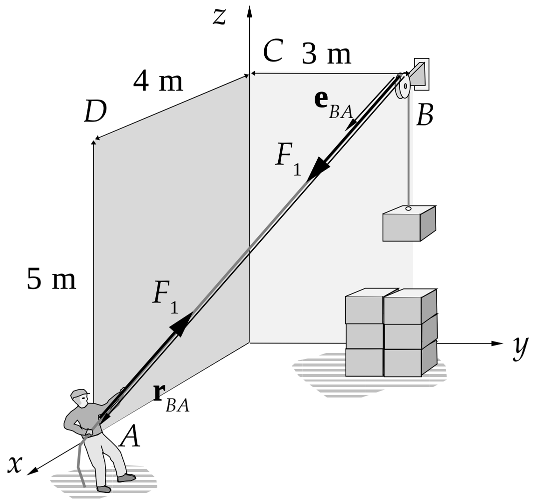
$$(4P)^2 = (3P)^2 + (2P)^2 - 2\cdot 3P\cdot 2P\cos(\pi - \beta)$$

$$\Rightarrow \quad 16 = 9 + 4 - 12\cos(\pi - \beta)$$

$$\Rightarrow \quad 3 = 12\cos\beta$$

$$\Rightarrow \quad \cos\beta = \frac{1}{4}$$

LP 2.10



Vektorn mellan B och A är

$$\mathbf{r}_{BA} = (4, -3, -5) \text{ m}$$

Den kan enklast i figuren ses som summan

$$\mathbf{r}_{BC} + \mathbf{r}_{CD} + \mathbf{r}_{DA} = \mathbf{r}_{BA}$$

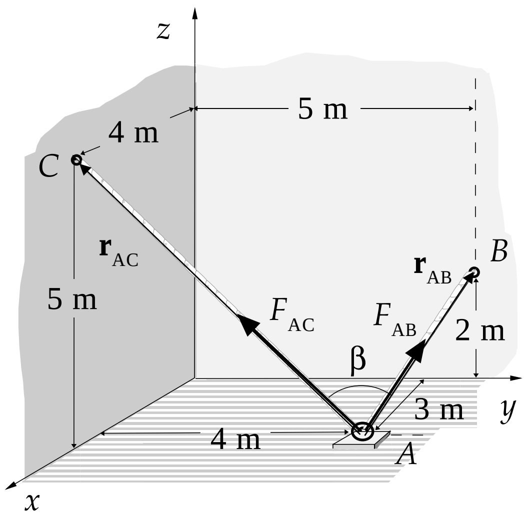
Kraftens riktning ges av enhetsvektorn

$$\mathbf{e}_{BA} = \frac{\mathbf{r}_{BA}}{|\mathbf{r}_{BA}|} = \frac{1}{\sqrt{4^2 + (-3)^2 + (-5)^2}}(4, -3, -5)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{50}}(4, -3, -5)$$

Kraften är alltså $\mathbf{F}_1 = F_1\mathbf{e}_{BA} = \frac{300}{\sqrt{50}}(4, -3, -5) \text{ N} = \underline{\underline{\frac{60}{\sqrt{2}}(4, -3, -5) \text{ N}}}$

LP 2.11



Skalärprodukten ger vinkeln mellan två kända vektorer. För enhetsvektorerna $\mathbf{e}_{AB}$ och $\mathbf{e}_{AC}$ fås nämligen

$$\mathbf{e}_{AB} \cdot \mathbf{e}_{AC} = 1 \cdot 1 \cdot \cos\beta$$

Vi bestämmer först enhetsvektorerna. För att se komponenterna av vektorn $\mathbf{r}_{AB}$ kan man i figuren se hur långt man behöver gå längs de olika koordinataxlarna för att komma från A till B. (Alternativt beräknas $\mathbf{r}_{AB} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A$, dvs drag A:s koordinater från B:s.

$$\mathbf{r}_{AB} = (-3, 1, 2) \text{ m} \quad \Rightarrow$$

$$\mathbf{e}_{AB} = \frac{\mathbf{r}_{AB}}{|\mathbf{r}_{AB}|} = \frac{1}{\sqrt{14}}(-3, 1, 2)$$

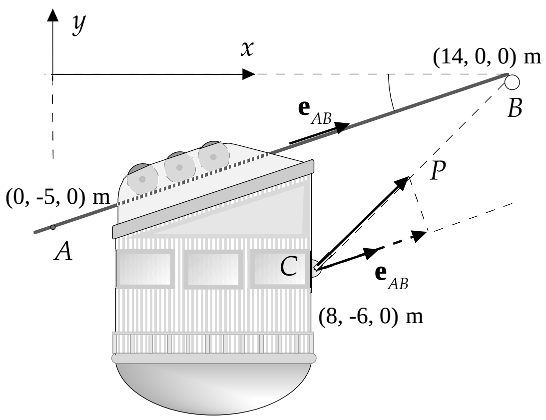
$$\mathbf{r}_{AC} = (1, -4, 5) \text{ m} \quad \Rightarrow \qquad \mathbf{e}_{AC} = \frac{\mathbf{r}_{AC}}{|\mathbf{r}_{AC}|} = \frac{1}{\sqrt{42}}(1, -4, 5)$$

Skalärprodukten blir $\mathbf{e}_{AB} \cdot \mathbf{e}_{AC} = \frac{1}{\sqrt{14}}(-3, 1, 2) \cdot \frac{1}{\sqrt{42}}(1, -4, 5) \quad \Rightarrow$

$$\mathbf{e}_{AB} \cdot \mathbf{e}_{AC} = \frac{1}{\sqrt{14 \cdot 42}}(-3 \cdot 1 + 1 \cdot (-4) + 2 \cdot 5) = \frac{3}{14\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \quad \cos\beta = \frac{3}{14\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\beta = \arccos\frac{\sqrt{3}}{14}}}$$

LP 2.12



Kraftens riktning sammanfaller med vektorn

$$\mathbf{r}_{CB} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_C$$

$$= (14,\ 0,\ 0)\ \text{m} - (8,\ -6,\ 0)\ \text{m}$$

$$= (6,\ 6,\ 0)\ \text{m}$$

Kraftens riktning ges då av enhetsvektorn

$$\mathbf{e}_{CB} = \frac{\mathbf{r}_{CB}}{|\mathbf{r}_{CB}|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)$$

Linan AB har en riktning som ges av

$$\mathbf{r}_{AB} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A$$

$$= (14,\ 0,\ 0)\ \text{m} - (0,\ -5,\ 0)\ \text{m}$$

$$= (14,\ 5,\ 0)\ \text{m}$$

Linans riktning ges då av enhetsvektorn

$$\mathbf{e}_{AB} = \frac{\mathbf{r}_{AB}}{|\mathbf{r}_{AB}|} = \frac{1}{\sqrt{221}}(14, 5, 0)$$

Kraften är
$$\mathbf{P} = P\mathbf{e}_{CB} = \frac{2100}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)\text{N}$$

Kraftens komponent med avseende på linan AB är

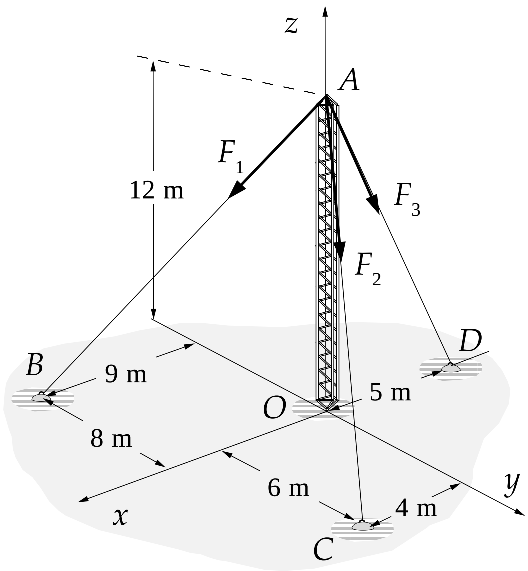
$$P_{\text{komp}} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{e}_{AB} = P\mathbf{e}_{CB} \cdot \mathbf{e}_{AB}$$

$$= 2100 \frac{1}{\sqrt{442}}(14 + 5 + 0)\text{N} = \frac{19}{\sqrt{442}} 2100\ \text{N} \approx 1900\ \text{N}$$

Svaret är

$$\underline{\underline{P_{\text{komp}} = \frac{19}{\sqrt{442}} 2100\ \text{N}}}$$

LP 2.13



Storleken på varje kraft är känd. För att kunna skriva krafterna som vektorer börjar vi med att bestämma enhetsvektorerna i krafternas riktningar:

$$\mathbf{r}_{AB} = (9, -8, -12)\ \text{m}$$
$$\mathbf{e}_{AB} = \frac{1}{17}(9, -8, -12)$$

$$\mathbf{r}_{AC} = (4, 6, -12)\ \text{m}$$
$$\mathbf{e}_{AC} = \frac{1}{7}(2, 3, -6)$$

$$\mathbf{r}_{AD} = (-5, 0, -12)\ \text{m}$$
$$\mathbf{e}_{AD} = \frac{1}{13}(-5, 0, -12)$$

Krafterna kan nu skrivas som vektorer:

$$\mathbf{F}_1 = F_1\mathbf{e}_{AB} = \frac{340}{17}(9, -8, -12)\ \text{N} = 20(9, -8, -12)\ \text{N}$$
$$\mathbf{F}_2 = F_2\mathbf{e}_{AC} = \frac{420}{7}(2, 3, -6)\ \text{N} = 60(2, 3, -6)\ \text{N}$$
$$\mathbf{F}_3 = F_3\mathbf{e}_{AD} = \frac{390}{13}(-5, 0, -12)\ \text{N} = 30(-5, 0, -12)\ \text{N}$$

Kraftresultanten med självklar angreppspunkt A är då

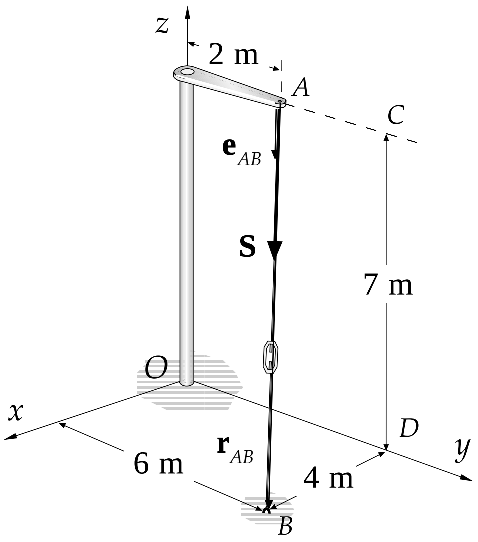
$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 = (180 + 120 - 150\ ,\ -160 + 180\ ,\ -240 - 360 - 360)\ \text{N}$$

$$= (150\ ,\ 20\ ,\ -960)\ \text{N}$$

Svar: Kraftresultanten har angreppspunkt A och är

$$\underline{\underline{\mathbf{F} = (150\ ,\ 20\ ,\ -960)\ \text{N}}}$$

LP 2.14



Kraftens riktning sammanfaller med staget:

$$\mathbf{r}_{AB} = (4\,,\ 4\,,\ -7)\ \text{m}$$

Enhetsvektorn i denna riktning är

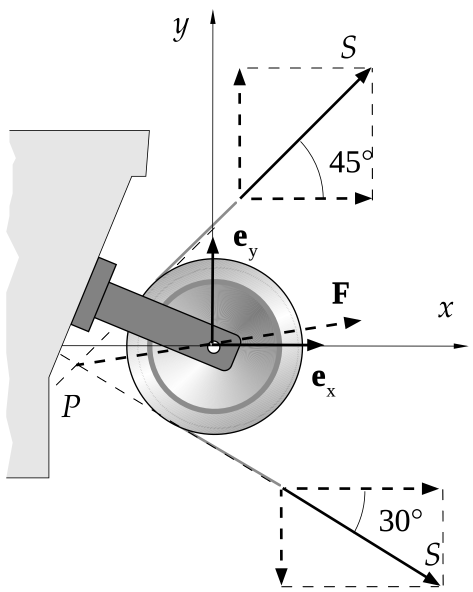
$$\mathbf{e}_{AB} = \frac{\mathbf{r}_{AB}}{|\mathbf{r}_{AB}|} = \frac{1}{\sqrt{16+16+49}}(4\,,\ 4\,,\ -7)$$
$$= \frac{1}{9}(4\,,\ 4\,,\ -7)$$

Kraften kan då skrivas

$$\mathbf{S} = S\mathbf{e}_{AB} = \frac{900}{9}(4,\ 4, -7)\ \text{N}$$
$$= 100(4,\ 4\,, -7)\ \text{N}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{S} = 100(4,\ 4\,, -7)\ \text{N}}}$$

LP 2.15



Om två krafter, som verkar på en stel kropp, har verkningslinjer som skär varandra i en skärningspunkt, kan de ersättas av kraftresultanten, som är kraftsumman med angreppspunkt i skärningspunkten. Kraftsumman är

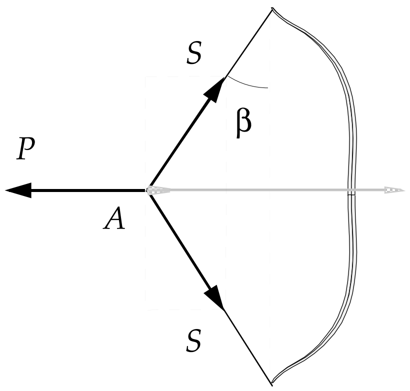
$$\mathbf{F} = \frac{S}{\sqrt{2}}\mathbf{e}_x + \frac{S}{\sqrt{2}}\mathbf{e}_y + \frac{\sqrt{3}S}{2}\mathbf{e}_x - \frac{S}{2}\mathbf{e}_y$$
$$= \frac{S}{2}\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\mathbf{e}_x + \frac{S}{2}\left(\sqrt{2}-1\right)\mathbf{e}_y$$

eller

$$\underline{\underline{\mathbf{F} = 100\left[\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\mathbf{e}_x + \left(\sqrt{2}-1\right)\mathbf{e}_y\right]\ \text{N}}}$$

Angreppspunkten på den linje som går genom skärningspunkten P och har samma riktning som kraftsumman **F**.

LP 2.16



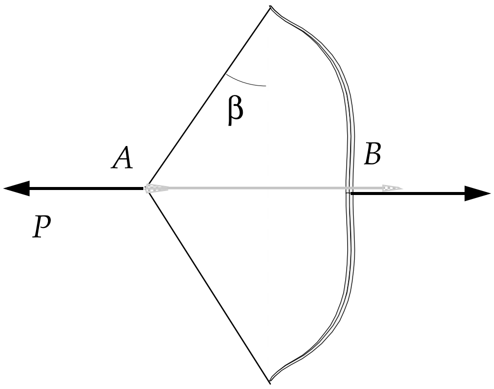
Antag att trådkraftens storlek är S. Den totala kraften i punkten A måste vara noll.

Vi får då för x- och y- komponenten:

$$\rightarrow: \quad -P + 2S\sin\beta = 0$$

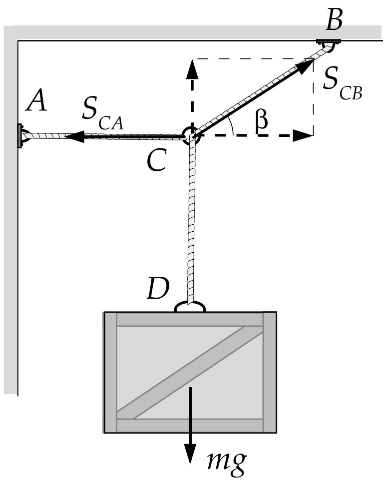
$$\uparrow: \quad S\cos\beta - S\cos\beta = 0$$

$$\Rightarrow \qquad S = \frac{P}{2\sin\beta}$$



Hela systemet pilbåge+pil påverkas av den yttre kraften P bakåt i punkten A. Vänsterhanden måste då ge en kraft P framåt i punkten B.

LP 2.17



Antag att krafterna i repen är S_{CA} och S_{CB}. Kraftsumman på ringen C är noll. Vi skriver kraftsummans horisontella och vertikala komponent:

$$\rightarrow: \quad S_{CB}\cos\beta - S_{CA} = 0$$

$$\uparrow: \quad S_{CB}\sin\beta - mg = 0$$

Den andra ekvationen ger

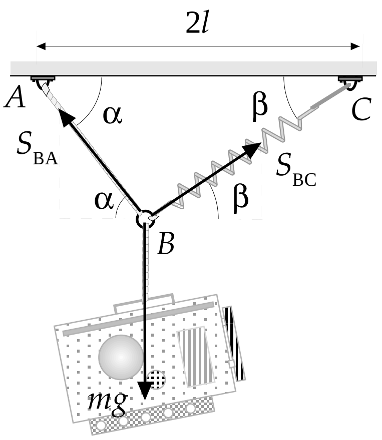
$$S_{CB} = \frac{mg}{\sin\beta}$$

Den första ekvationen ger då

$$S_{CA} = \frac{mg}{\sin\beta}\cos\beta$$

Svar: Trådkrafterna är $\underline{\underline{S_{CB} = \frac{mg}{\sin\beta}}}$ och $\underline{\underline{S_{CA} = \frac{mg}{\tan\beta}}}$

LP 2.18



Krafterna, som har angreppspunkt i ringen B, kan adderas till en kraftresultant, som måste vara noll. I komponentform fås

$$\rightarrow: \quad S_{BC}\cos\beta - S_{BA}\cos\alpha = 0 \qquad (1)$$

$$\uparrow: \quad S_{BC}\sin\beta + S_{BA}\sin\alpha - mg = 0 \qquad (2)$$

Ekv (1) ger

$$S_{BA} = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha} S_{BC} \qquad (3)$$

Insättning i ekv (2) ger

$$\left(\sin\beta + \frac{\cos\beta\sin\alpha}{\cos\alpha}\right) S_{BC} = mg \qquad (4)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\sin\beta\cos\alpha + \cos\beta\sin\alpha}{\cos\alpha} S_{BC} = mg \qquad (5)$$

$$\Rightarrow \quad \sin(\beta+\alpha) S_{BC} = mg\cos\alpha \qquad (6)$$

$$\Rightarrow \quad S_{BC} = \frac{\cos\alpha}{\sin(\beta+\alpha)} mg \qquad (7)$$

Men fjäderkraften är enligt Hookes lag

$$S_{BC} = k\Delta l \qquad (8)$$

Fjäderns aktuella längd $|\mathbf{r}_{BC}|$ bestäms med sinussatsen:

$$\frac{|\mathbf{r}_{BC}|}{\sin\alpha} = \frac{2l}{\sin[\pi - (\alpha+\beta)]} \quad \Rightarrow \quad |\mathbf{r}_{BC}| = \frac{2l\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} \qquad (9)$$

Förlängningen är då

$$\Delta l = \left[\frac{2\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} - 1\right] l \qquad (10)$$

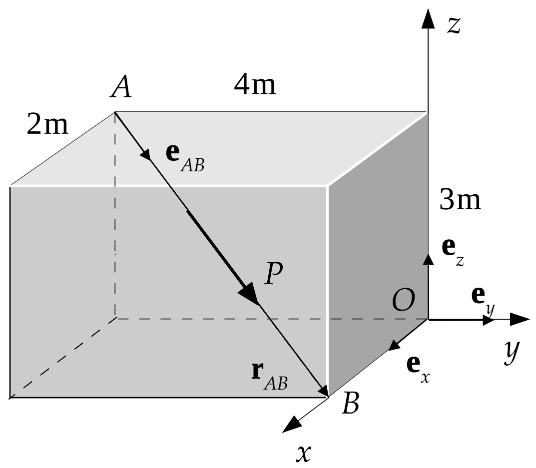
Utnyttja nu ekv (8), (10) och (7)

$$k\left[\frac{2\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} - 1\right] l = \frac{\cos\alpha}{\sin(\beta+\alpha)} mg \qquad (11)$$

$$k\left[\frac{2\sin\alpha - \sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}\right] l = \frac{\cos\alpha}{\sin(\beta+\alpha)} mg \qquad (12)$$

$$\underline{\underline{mg = \frac{2\sin\alpha - \sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha} kl}}$$

LP 2.19



Kraftens riktning sammanfaller med rymddiagonalen AB som kan skrivas som en vektor genom att gå omvägen

$$A \rightarrow C \rightarrow O \rightarrow B:$$

$$\mathbf{r}_{AB} = \mathbf{r}_{AC} + \mathbf{r}_{CO} + \mathbf{r}_{OB}$$

$$\mathbf{r}_{AB} = \left(4\mathbf{e}_y \text{ - } 3\mathbf{e}_z + 2\mathbf{e}_y \right)\text{m}$$

eller

$$\mathbf{r}_{AB} = (\ 2, 4, -3\ )\text{m}$$

Enhetsvektorn i denna riktning är

$$\mathbf{e}_{AB} = \frac{\mathbf{r}_{AB}}{|\mathbf{r}_{AB}|} = \frac{1}{\sqrt{4+16+9}}(\ 2\ ,\ 4\ ,\text{ - }3)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{29}}(\ 2\ ,\ 4\ ,\text{ - }3)$$

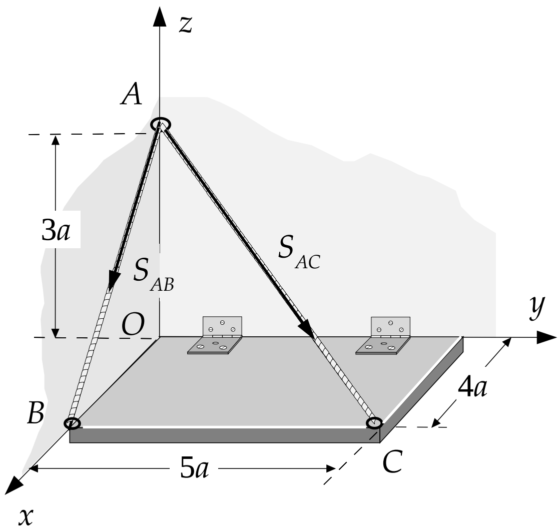
Kraften kan då skrivas

$$\mathbf{P} = P\mathbf{e}_{AB} = \frac{200}{\sqrt{29}}(\ 2,\ 4,\text{-}3)\ \text{N}$$

eller

$$\underline{\underline{\mathbf{P} = \frac{200}{\sqrt{29}}\left(\ 2\mathbf{e}_x + \ 4\mathbf{e}_y \text{ - } 3\mathbf{e}_z\right)\ \text{N}}}$$

LP 2.20



Den totala kraften på A orsakad av trådkrafterna är

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_{AB} + \mathbf{S}_{AC} = P\mathbf{e}_{AB} + \sqrt{2}P\mathbf{e}_{AC}$$

Vi bestämmer enhetsvektorerna:

$$\mathbf{r}_{AB} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A = (\ 4,\ 0{,}0\ )a - (\ 0,\ 0{,}3\ )a$$

$$= (\ 4,\ 0{,}-3\ )a$$

Enhetsvektorn i denna riktning är

$$\mathbf{e}_{AB} = \frac{\mathbf{r}_{AB}}{|\mathbf{r}_{AB}|} = \frac{1}{\sqrt{16+0+9}}(\ 4\ ,\ 0\ ,\ \text{-}\ 3)$$

$$= \frac{1}{5}(\ 4\ ,\ 0\ ,\ \text{-}\ 3)$$

$$\mathbf{r}_{AC} = \mathbf{r}_C - \mathbf{r}_A = (\ 4,\ 5{,}0\ )a - (\ 0,\ 0{,}3\ )a$$

$$= (\ 4,\ 5{,}-3\ )a$$

Enhetsvektorn i denna riktning är

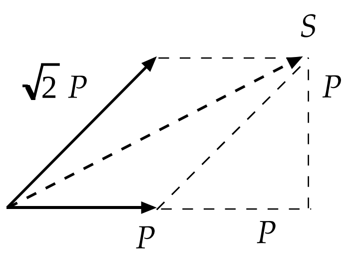
$$\mathbf{e}_{AC} = \frac{\mathbf{r}_{AC}}{|\mathbf{r}_{AC}|} = \frac{1}{\sqrt{16+25+9}}(\ 4\ ,\ 5\ ,\ \text{-}\ 3) = \frac{1}{5\sqrt{2}}(\ 4\ ,\ 5\ ,\ \text{-}\ 3)$$

Kraften kan då skrivas

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_{AB} + \mathbf{S}_{AC} = \frac{P}{5}(\ 4\ ,\ 0\ ,\ \text{-}\ 3) + \frac{P}{5}(\ 4\ ,\ 5\ ,\ \text{-}\ 3)$$

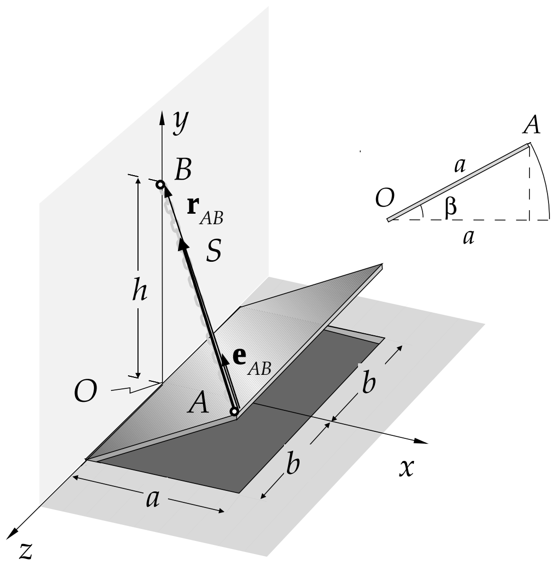
$$\mathbf{S} = \frac{P}{5}(\ 8\ ,\ 5\ ,\ \text{-}\ 6)$$

Storleken av denna kraft är $\mathbf{S} = \dfrac{P}{5}\sqrt{64+25+36} = \sqrt{5}P$



En enkel alternativ lösning utnyttjar figuren här till vänster. Eftersom tråden AB har samma längd $5a$ som kanten BC och $\mathbf{r}_{AB} \perp \mathbf{r}_{BC}$ måste vinkeln mellan trådarna vara $45°$. Då fås en enkel geometri för krafttriangeln. Kraftens storlek bestäms med Pythagoras sats: $S = \sqrt{P^2 + (2P)^2} = \sqrt{5}P$

LP 2.21



Kraften har samma riktning som kedjan

$$\mathbf{S} = P\mathbf{e}_{AB}$$

Vi bestämmer först enhetsvektorn:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_{AB} &= \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A \\ &= (\,0,\ h,\ 0\,) - (\,a\cos\beta,\ a\sin\beta, b\,) \\ &= (\,-a\cos\beta,\ h - a\sin\beta,\ -b\,)\end{aligned}$$

Men $h = a$ och $\beta = 30°$ $\quad\Rightarrow$

$$\mathbf{r}_{AB} = \left(\,-\frac{\sqrt{3}}{2}a,\ \frac{1}{2}a,\ -b\,\right)$$

Enhetsvektorn i denna riktning är

$$\mathbf{e}_{AB} = \frac{\mathbf{r}_{AB}}{|\mathbf{r}_{AB}|}$$

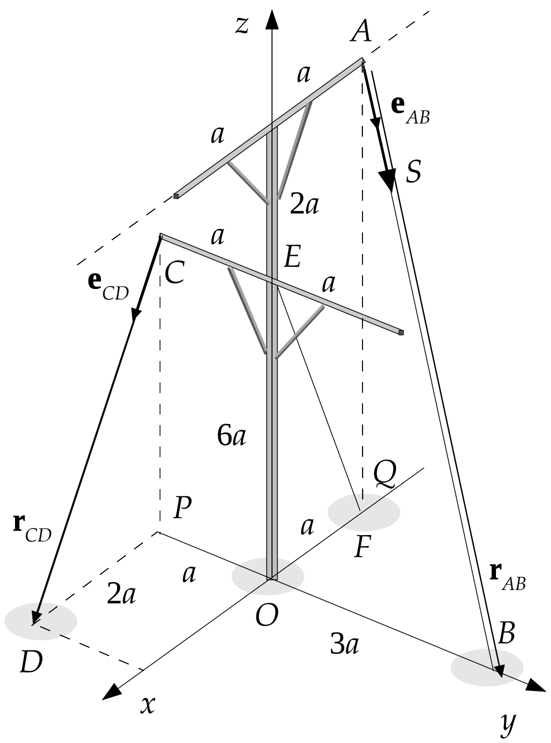
$$\mathbf{e}_{AB} = \frac{1}{\sqrt{3a^2 + a^2 + 4b^2}}\left(-\sqrt{3}\,a\ ,\ a\ ,-2b\right) \qquad \Rightarrow$$

$$\mathbf{e}_{AB} = \frac{1}{2\sqrt{a^2 + b^2}}\left(-\sqrt{3}\,a\ ,\ a\ ,-2b\right)$$

Kraften kan då skrivas

$$\mathbf{S} = P\mathbf{e}_{AB} = \underline{\underline{\frac{P}{2\sqrt{a^2 + b^2}}\left(-\sqrt{3}\,a\ ,\ a\ ,-2b\right)}}$$

LP 2.22



Kraften kan skrivas

$$\mathbf{S} = S\mathbf{e}_{AB}$$

Vi bestämmer först vektorn $\mathbf{r}_{AB}$ antingen genom att gå vägen $A \rightarrow Q \rightarrow O \rightarrow B$ eller

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_{AB} &= \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A \\ &= (\ 0,\ 3a,\ 0\ ) - (\ -a, 0, 8a\ ) \\ &= (\ a,\ 3a, -8a\ )\end{aligned}$$

Enhetsvektorn i denna riktning är

$$\mathbf{e}_{AB} = \frac{\mathbf{r}_{AB}}{|\mathbf{r}_{AB}|}$$

$$\mathbf{e}_{AB} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 9a^2 + 64a^2}}(\,a\ ,\ 3a\ , -8a)$$

$$\Rightarrow \qquad \mathbf{e}_{AB} = \frac{1}{\sqrt{74}}(1\ ,\ 3\ , -8)$$

Kraften kan då skrivas

$$\mathbf{S} = S\mathbf{e}_{AB} = \underline{\underline{\frac{S}{\sqrt{74}}(1\ ,\ 3\ , -8)}}$$

Vi bestämmer sedan vektorn $\mathbf{r}_{CD}$ antingen genom att gå vägen $C \rightarrow P \rightarrow D$ eller

$$\mathbf{r}_{CD} = \mathbf{r}_D - \mathbf{r}_C = (\ 2a,\ -a,\ 0\ ) - (\ 0, -a, 6a\ ) = (\ 2a,\ 0, -6a\ )$$

Enhetsvektorn i denna riktning är

$$\mathbf{e}_{CD} = \frac{\mathbf{r}_{CD}}{|\mathbf{r}_{CD}|} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{e}_{CD} = \frac{1}{\sqrt{4a^2 + 0 + 36a^2}}(\,2a\ ,\ 0\ , -6a)$$

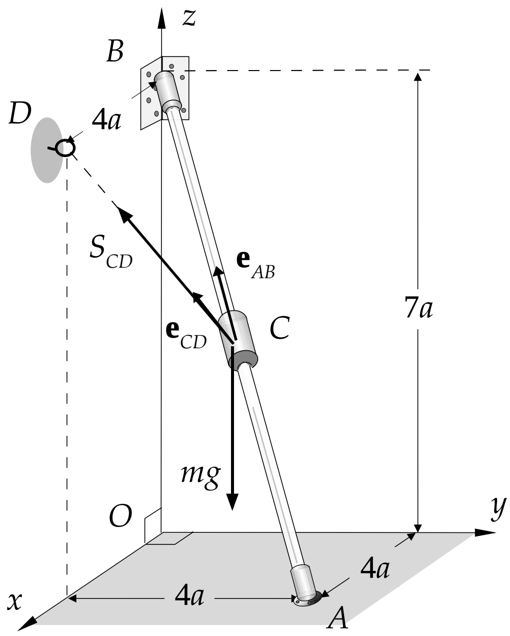
$$\Rightarrow \qquad \mathbf{e}_{CD} = \frac{1}{\sqrt{10}}(1\ ,\ 0\ , -3)$$

Kraftens komponent med avseende på staget CD blir

$$S_{CD} = \mathbf{S}_{AB} \cdot \mathbf{e}_{CD} = S\mathbf{e}_{AB} \cdot \mathbf{e}_{CD} = S\frac{1}{\sqrt{74}}(1\ ,\ 3\ , -8) \cdot \frac{1}{\sqrt{10}}(1\ ,\ 0\ , -3)$$

$$S_{CD} = S\frac{1}{\sqrt{740}}(1 \cdot 1\ ,\ 3 \cdot 0\ , -8 \cdot (-3)) = \underline{\underline{\frac{25}{\sqrt{740}}S}}$$

LP 2.23



Frilägg hylsan C! Friläggningsfiguren visar trådkraften, normalkraften N och tyngdkraften mg som verkar på ringen. Vektorsumman av alla dessa krafter ska vara noll. Normalkraften behöver inte bestämmas. Vi väljer då att projicera krafterna på stångens riktning. Detta gör att normalkraften aldrig kommer med i ekvationerna. Eftersom trådkraftens riktning är känd ur geometrin är det bara beloppet som ska bestämmas. Trådkraften genom C och D skrivs som en vektor $\mathbf{S}_{CD} = S_{CD}\mathbf{e}_{CD}$, där S_{CD} är beloppet av $\mathbf{S}_{CD}$. Bestäm först enhetsvektorerna $\mathbf{e}_{CD}$ och $\mathbf{e}_{AB}$.

$$\mathbf{r}_{CD} = \mathbf{r}_D - \mathbf{r}_C = (4,\,0,\,7)a - (2,\,2,\,7/2)a = (2,-2,\,7/2)a$$

$$\mathbf{e}_{CD} = \frac{\mathbf{r}_{CD}}{|\mathbf{r}_{CD}|} = \frac{(4,-4,-7)a}{|(4,-4,-7)a|} = \frac{(4,-4,-7)}{\sqrt{16+16+49}} = \frac{1}{9}(4,-4,\,7)$$

På samma sätt fås

$$\mathbf{r}_{AB} = (-4,-4,\,7)a \quad \Rightarrow \quad \mathbf{e}_{AB} = \frac{\mathbf{r}_{AB}}{|\mathbf{r}_{AB}|} = \frac{(-4,-4,\,7)a}{\left|\sqrt{16+16+49}\;a\right|} = \frac{1}{9}(-4,-4,\,7)$$

Summan av krafternas komponenter med avseende på riktningen $\mathbf{e}_{AB}$ skall vara noll:

$$S_{CD}\mathbf{e}_{CD}\cdot\mathbf{e}_{AB} - mg\mathbf{e}_z\cdot\mathbf{e}_{AB} = 0$$

I komponentform:

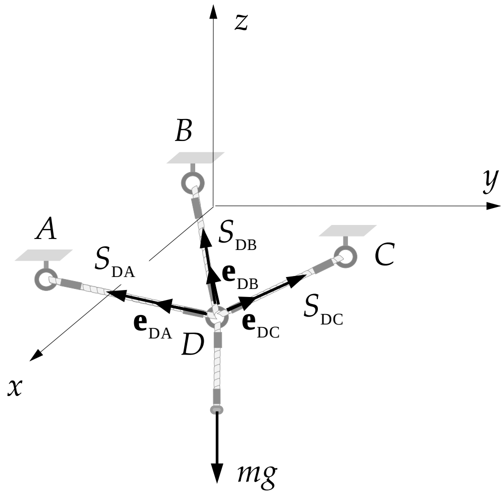
$$S_{CD}\frac{1}{9}(4,-4,\,7)\cdot\frac{1}{9}(-4,-4,\,7) - mg(0,\,0,\,1)\cdot\frac{1}{9}(-4,-4,\,7) = 0$$

$$S_{CD}\frac{1}{81}(-16+16+49)) - mg\frac{1}{9}(0+0+7) = 0$$

$$\frac{49}{81}S_{CD} = mg\frac{7}{9} \qquad \Rightarrow$$

$$\underline{\underline{S_{CD} = \frac{9}{7}mg}}$$

LP 2.24



Frilägg ringen D! Friläggningsfiguren visar trådkrafterna som verkar på ringen. Vektorsumman av alla dessa krafter ska vara noll. Detta betyder tre ekvationer, en för varje komponent, och då kan de tre obekanta krafternas storlekar bestämmas. Eftersom krafternas riktningar är kända ur geometrin är det bara beloppen som ska bestämmas. Trådkraften genom t ex D och B skrivs som vektor $\mathbf{S}_{DB} = S_{DB}\mathbf{e}_{DB}$, där S_{DB} är beloppet av $\mathbf{S}_{DB}$.
Bestäm först enhetsvektorerna i krafternas riktningar!

$$\mathbf{r}_{DA} = \mathbf{r}_A - \mathbf{r}_D = (3,-3,0)a - (0,0,-4)a = (3,-3,4)a$$

$$\mathbf{e}_{DA} = \frac{\mathbf{r}_{DA}}{|\mathbf{r}_{DA}|} = \frac{(3,-3,4)a}{|(3,-3,4)a|} = \frac{(3,-3,4)}{\sqrt{9+9+16}} = \frac{1}{\sqrt{34}}(3,-3,4)$$

På samma sätt fås

$$\mathbf{r}_{DB} = (-2,-2,4)a \quad \Rightarrow \quad \mathbf{e}_{DB} = \frac{\mathbf{r}_{DB}}{|\mathbf{r}_{DB}|} = \frac{(-1,-1,2)a}{|\sqrt{1+1+4}\;a|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,-1,2)$$

$$\mathbf{r}_{DC} = (2,4,4)a \quad \Rightarrow \quad \mathbf{e}_{DC} = \frac{\mathbf{r}_{DC}}{|\mathbf{r}_{DC}|} = \frac{(2,4,4)a}{|\sqrt{4+16+16}\;a|} = \frac{1}{3}(1,2,2)$$

Summan av trådkrafterna $\mathbf{S}_{DA} = S_{DA}\mathbf{e}_{DA}$, $\mathbf{S}_{DB} = S_{DB}\mathbf{e}_{DB}$ och $\mathbf{S}_{DC} = S_{DC}\mathbf{e}_{DC}$ samt tyngdkraften $-mg\mathbf{e}_z$ skall bli noll:

$$S_{DA}\mathbf{e}_{DA} + S_{DB}\mathbf{e}_{DB} + S_{DC}\mathbf{e}_{DC} - mg\mathbf{e}_z = \mathbf{0}$$

I komponentform:

$$\begin{cases} \dfrac{3}{\sqrt{34}}S_{DA} - \dfrac{1}{\sqrt{6}}S_{DB} + \dfrac{1}{3}S_{DC} = 0 & (1) \\ -\dfrac{3}{\sqrt{34}}S_{DA} - \dfrac{1}{\sqrt{6}}S_{DB} + \dfrac{2}{3}S_{DC} = 0 & (2) \\ \dfrac{4}{\sqrt{34}}S_{DA} + \dfrac{2}{\sqrt{6}}S_{DB} + \dfrac{2}{3}S_{DC} - mg = 0 & (3) \end{cases}$$

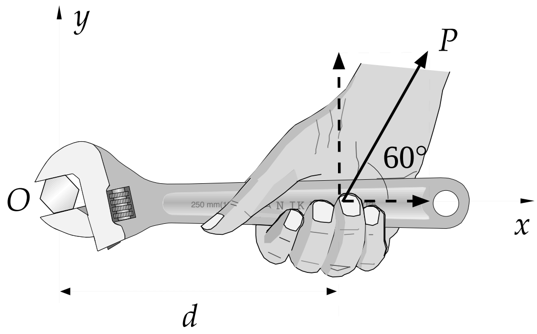
Addera (1) och (2): $\dfrac{2}{\sqrt{6}}S_{DB} = S_{DC}$

Insättning i (1) ger $S_{DB} = \dfrac{9\sqrt{3}}{\sqrt{17}}S_{DA}$

Insättning i (3) ger resultatet

$$\underline{\underline{S_{DA} = \frac{mg}{\sqrt{34}}; \quad S_{DB} = \frac{9\sqrt{6}\,mg}{34}; \quad S_{DC} = \frac{9mg}{17}}}$$

LP 2.26



Kraften P från handen på skiftnyckeln är ju i sig en kraftresultant till alla de krafter som verkar på varje liten del av kontaktytan mellan hand och nyckel. Kraftmomentet med avseende på punkten O beräknas enligt

$$\boxed{\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F}}$$

Här är $\mathbf{r} = (d, 0, 0)$ och $\mathbf{F} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)P$

Insättning ger

$$\mathbf{M}_O = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ d & 0 & 0 \\ 1 & \sqrt{3} & 0 \end{vmatrix} \frac{P}{2} = \left(0, 0, d\sqrt{3}\right)\frac{P}{2}$$

$$\Rightarrow \qquad \underline{\underline{\mathbf{M}_O = \frac{\sqrt{3}Pd}{2}\mathbf{e}_z}}$$

b) Kraftmomentet med avseende på z-axeln är

$$\boxed{M_z = \mathbf{M}_O \cdot \mathbf{e}_z}$$

Insättning ger

$$M_z = \mathbf{M}_O \cdot \mathbf{e}_z = \frac{\sqrt{3}Pd}{2}\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_z = \frac{\sqrt{3}Pd}{2}$$

Detta är komponenten. Det går lika bra att svara med vektorn:

$$\underline{\underline{\mathbf{M}_z = \frac{\sqrt{3}Pd}{2}\mathbf{e}_z}}$$

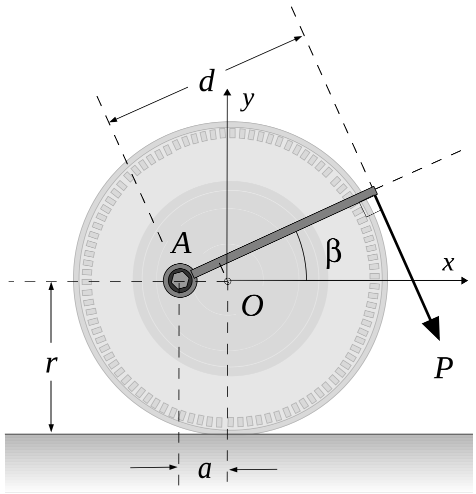
Kommentar: Här utnyttjar vi de nya definitionerna mest för att träna på dem i ett mycket enkelt fall. Problemet är ju så enkelt att man lika gärna räknar med hävarm gånger kraft och sedan anger riktningen moturs genom att sätta ut enhetsvektorn $\mathbf{e}_z$.

Hävarmen till kraften P är $\frac{\sqrt{3}}{2}d$.

Hävarmen till y-komposanten av kraften P är d.

Momentarmen till kraften P är vektorn $\mathbf{r}$.

LP 2.27



Kraften P har med avseende på en axel genom P en hävarm d så att kraftmomentet blir

$$M_A = -d \cdot P \tag{1}$$

Detta moment skall betraktas som en komponent av en vektor så att

$$M_A \equiv (\mathbf{M}_A)_z \tag{2}$$

Vi väljer moturs som den positiva riktningen så att den överensstämmer med z-axelns riktning. Minustecknet talar då om att momentet är medurs.

Motsvarande kraftmoment med avseende på en axel genom O blir

$$M_O = -(d - a\cos\beta) \cdot P \tag{3}$$

Här valde vi att bestämma hävarmen till hela kraften. Alternativt kan man dela upp kraften i en vertikal och en horisontell komponent och addera de kraftmoment som de komponenterna ger.

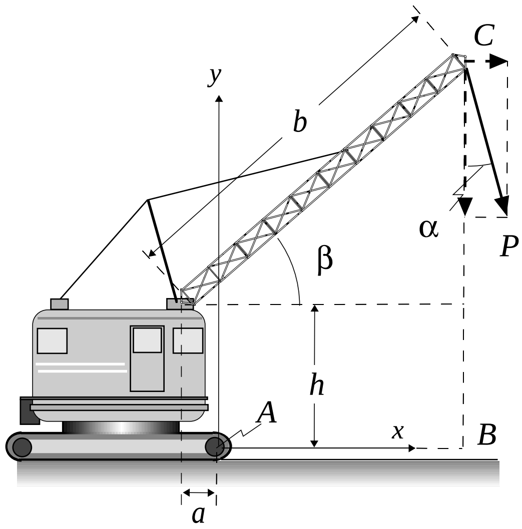
Vi kollar slutligen att sambandsformeln $\mathbf{M}_O = \mathbf{M}_A + \mathbf{r}_{OA} \times \mathbf{F}$ gäller. Högerledet av sambandsformeln blir

$$(\mathbf{M}_A + \mathbf{r}_{OA} \times \mathbf{F})_z = -dP + \left[-a\mathbf{e}_x \times (P\sin\beta\,\mathbf{e}_x - P\cos\beta\,\mathbf{e}_y)\right]_z = \tag{4}$$

$$= -dP + aP\cos\beta = -(d - a\cos\beta)P \tag{5}$$

vilket enligt ovan överensstämmer med vänsterledet M_O enl (3).

LP 2.28



Vi delar först upp kraften i komposanter, vars hävarmar är lättare att hitta än hävarmen till hela kraften

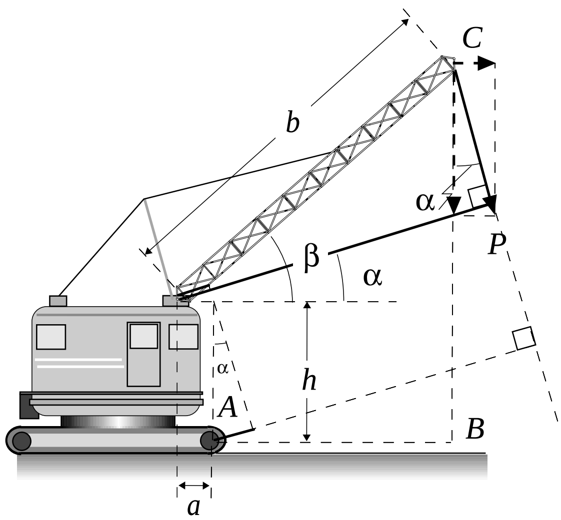
$$(\mathbf{M}_A)_z = (\mathbf{r}\times\mathbf{F})_z$$

$$= -(h + b\sin\beta)P\sin\alpha - (b\cos\beta - a)P\cos\alpha$$

Detta kan också skrivas:

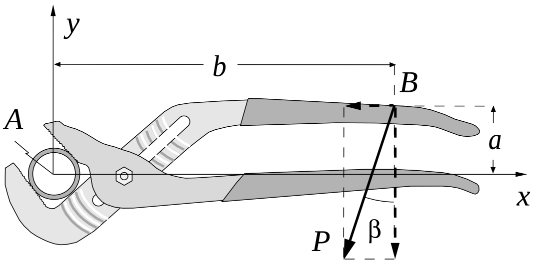
$$(\mathbf{M}_A)_z = \left[a\cos\alpha - h\sin\alpha - b(\cos\beta\cos\alpha + b\sin\beta\sin\alpha)\right]P$$

$$= -\left[b\cos(\beta-\alpha) - a\cos\alpha + h\sin\alpha\right]P$$



Innanför klammern står alltså häv-armen till P, dvs avståndet mellan A och kraftens verkningslinje. Kan du ur geometrin se att hävarmen är den rätta? De tre sträckorna i klammern är markerade i figuren.

LP 2.29



Kraften delas upp i komposanter. Kraftmomentet med avseende på punkten A är

$$\mathbf{M}_A = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

Kraftmomentet med avseende på en axel genom A vinkelrät mot nyckelns plan är

$$(\mathbf{M}_A)_z = (\mathbf{r} \times \mathbf{F})_z$$

$$= aP\sin\beta - bP\cos\beta$$

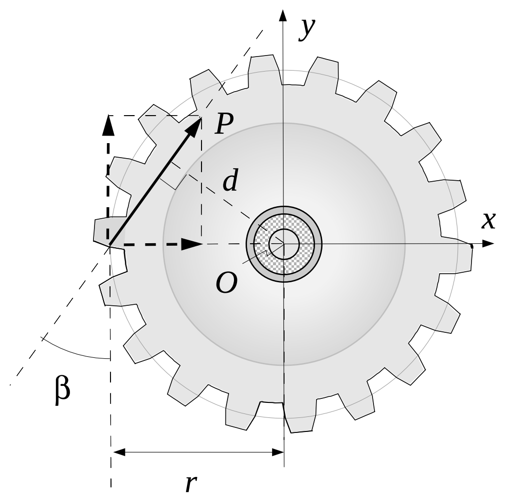
Vi kan även bestämma kraftmomentet med en determinant:

$$\mathbf{M}_A = \mathbf{r}_{AB} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ b & a & 0 \\ -P\sin\beta & -P\cos\beta & 0 \end{vmatrix} = (-bP\cos\beta + aP\sin\beta)\,\mathbf{e}_z$$

Det går också att svara

Momentet är $(a\sin\beta - b\cos\beta)P$ moturs eftersom då riktningen också framgår.

LP 2.30



Den vridande förmågan är detsamma som kraftmomentet. Den i figuren horisontella komponenten av kraften P har en verkningslinje som går genom punkten O. Den delen av kraften bidrar alltså därför inte till momentet.

Den vertikala kraftkomponenten är $P\cos\beta$ och har hävarmen r med avseende på kugghjulets axel. Den ger ett kraftmoment $rP\cos\beta$ medurs med avseende på axeln.

Det frågas efter kraftmomentet med avseende på *punkten* O. I detta fall är det detsamma som momentet med avseende på axeln, alltså

$$\underline{\underline{\mathbf{M}_O = -rP\cos\beta\,\mathbf{e}_z}}$$

Insättning av givna värden ger

$$\mathbf{M}_O = -0.080\cdot 60\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{e}_z \text{ Nm}$$

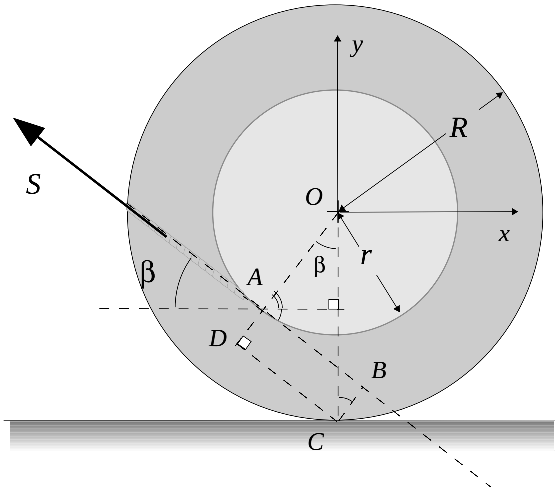
$$\Rightarrow \qquad \mathbf{M}_O \approx -4.16\,\mathbf{e}_z \text{ Nm}$$

Kommentar: När är kraftmomentet med avseende på en axel detsamma som kraftmomentet med avseende på en punkt på axeln?

Kraftmomentet med avseende på punkten O beräknas enligt $\mathbf{M}_O = \mathbf{r}\times\mathbf{F}$. Om hela denna vektor ligger längs axeln så är kraftmomentet med avseende på axeln detsamma som kraftmomentet med avseende på punkten på axeln.

Om i detta problem kraften hade haft en komposant i z-axelns riktning så hade kraftmomentet med avseende på punkten O fått en komposant i den negativa y-riktningen. Kraftmomentet med avseende på axeln hade däremot inte förändrats.

LP 2.31



Avståndet OA är r. Kraften $\mathbf{S}$ har alltså en hävarm r med avseende på en axel genom O. Enligt definitionen

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

fås

$$\underline{\underline{\mathbf{M}_O = -rS\,\mathbf{e}_z}}$$

Numeriskt värde:

$$\mathbf{M}_O = -0.12 \cdot 120\,\mathbf{e}_z \text{ Nm} = -14.4\,\mathbf{e}_z \text{ Nm}$$

Hävarmen med avseende på en axel genom C kan bestämmas ur figurens geometri. Avståndet BC är detsamma som avståndet OD minus avståndet OA, dvs hävarmen är

$$R\cos\beta - r$$

och momentet blir

$$\underline{\underline{\mathbf{M}_C = (R\cos\beta - r)S\,\mathbf{e}_z}}$$

Numeriskt värde: $$\mathbf{M}_O = \left(0.200 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 0.120\right) \cdot 120\mathbf{e}_z \text{ Nm} = 6.38\,\mathbf{e}_z \text{ Nm}$$

Kraftmomentet $\mathbf{M}_C$ blir noll för

$$R\cos\beta - r = 0 \quad \Rightarrow \quad R\cos\beta - r = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos\beta = \frac{r}{R}$$

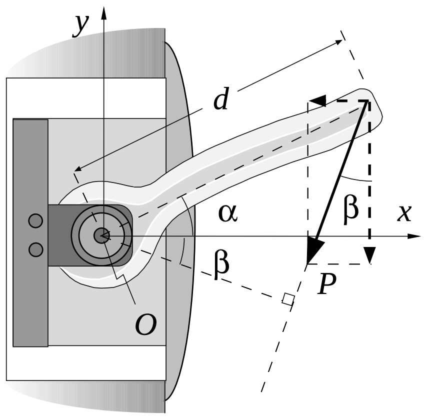
Detta motsvaras av att kraftens verkningslinje går genom kontaktpunkten C.

Kommentar:

Enligt sambandsformeln skall gälla: $\mathbf{M}_C = \mathbf{M}_O + \mathbf{r}_{OC} \times \mathbf{S}$

Kontrollera gärna att den stämmer med de bestämda uttrycken på $\mathbf{M}_C$ och $\mathbf{M}_O$!

LP 2.32



Den vridande förmågan eller kraftmomentet med avseende på punkten O beräknas enligt

$$\boxed{\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F}}$$

Inför ett koordinatsystem enligt figuren!

Här är

$$\mathbf{r} = (d\cos\alpha,\, d\sin\alpha,\, 0)$$

och

$$\mathbf{F} = (-P\sin\beta,\, -P\cos\beta,\, 0)$$

Insättning ger

$$\mathbf{M}_O = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ d\cos\alpha & d\sin\alpha & 0 \\ -P\sin\beta & -P\cos\beta & 0 \end{vmatrix} = \left(0,\, 0,\, Pd(-\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta)\right)$$

$$\Rightarrow \qquad \mathbf{M}_O = Pd(-\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta)\mathbf{e}_z$$

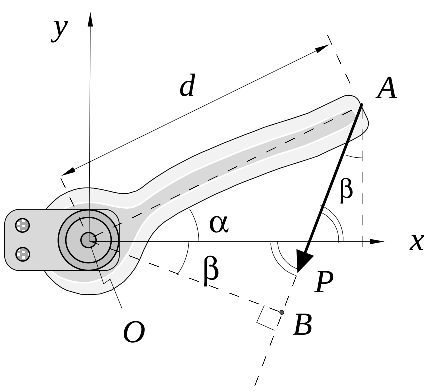
eller med ett känt trigonometriskt samband

$$\underline{\underline{\mathbf{M}_O = -Pd\cos(\alpha+\beta)\mathbf{e}_z}}$$

I figuren kan man se och identifiera hävarmen $d\cos(\alpha+\beta)$ till hela kraften.

Numeriskt värde: $\mathbf{M}_O = -2 \cdot 0.025\cos 60° \,\mathbf{e}_z$ Nm $= -0.025\,\mathbf{e}_z$ Nm

Kommentar:



Även i detta fall kan vi bestämma kraftmomentet genom att söka upp antingen hävarmarna till den horisontella och vertikala kraftkomposanten eller också hävarmen r_{OB} till hela kraften.

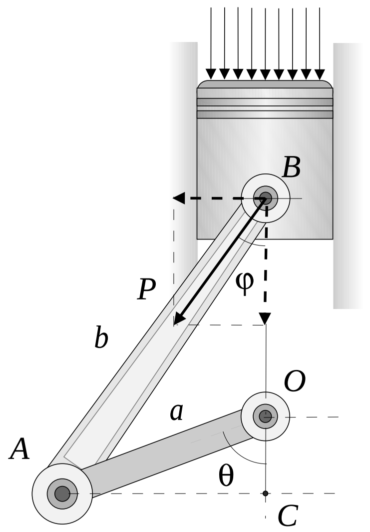
Figuren visar hur man bestämmer detta avstånd mellan O och B.

Den tvåstrukna vinkeln är $\dfrac{\pi}{2} - \beta$.

vilket betyder att hävarmen är

$$r_{OB} = d\cos(\alpha+\beta)$$

LP 2.36



Tryckkraften x i stången är given. Antingen bestämmer man hävarmen till hela denna kraft, dvs avståndet mellan stång och punkten O, eller också delar man upp kraften i två komposanter och bestämmer hävarmarna till dessa.

Dela upp kraften i punkten B i två komposanter enligt figur. Den vertikala komposanten bidrar ej till kraftmomentet, eftersom verkningslinjen går genom punkten O. Då återstår bara att bestämma hävarmen till den horisontella komposanten som är avståndet r_{OB}. Denna fås med cosinussatsen

$$r_{OB} = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos(\theta - \varphi)}$$

$$M_O = r_{OB} \cdot P \sin\varphi$$

Vinkeln φ bestäms med sinussatsen:

$$\frac{\sin\varphi}{a} = \frac{\sin(\pi - \theta)}{b} \qquad \Rightarrow \qquad \sin\varphi = \frac{a\sin\theta}{b} \tag{1}$$

$$\Rightarrow \qquad \cos\varphi = \sqrt{1 - \sin^2\varphi} = \sqrt{1 - \frac{a^2\sin^2\theta}{b^2}} = \frac{1}{b}\sqrt{b^2 - a^2\sin^2\theta} \tag{2}$$

Avståndet r_{OC} är $r_{OC} = a\cos\theta$ (3)

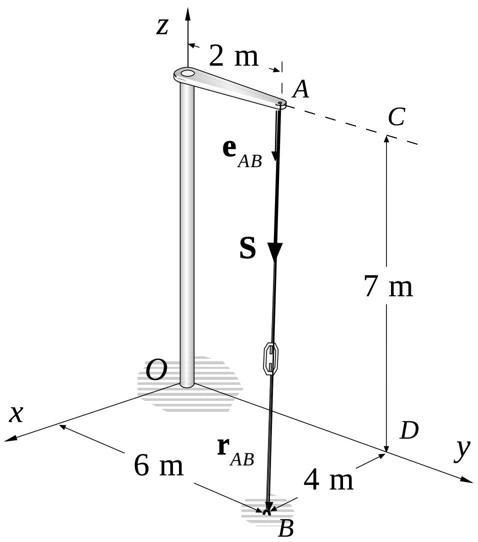
Då är $r_{OB} = b\cos\varphi - a\cos\theta$ (4)

Insättning av (2) ger $r_{OB} = \sqrt{b^2 - a^2\sin^2\theta} - a\cos\theta$ (5)

Kraftmomentets *storlek* är då hävarm gånger kraft, dvs

$$\underline{\underline{M_O = \left(\sqrt{b^2 - a^2\sin^2\theta} - a\cos\theta\right)\frac{a\sin\theta}{b}P}}$$

LP 2.39



Kraftens riktning sammanfaller med staget:

$$\mathbf{r}_{AB} = (\,4\,,\ 4\,,\,\text{-}\,7\,)\ \text{m}$$

Enhetsvektorn i denna riktning är

$$\mathbf{e}_{AB} = \frac{\mathbf{r}_{AB}}{|\mathbf{r}_{AB}|} = \frac{1}{\sqrt{16+16+49}}(\,4\,,\ 4\,,\,\text{-}\,7\,)$$

$$= \frac{1}{9}(\,4\,,\ 4\,,\,\text{-}\,7\,)$$

Kraften kan då skrivas

$$\mathbf{S} = S\mathbf{e}_{AB} = \frac{900}{9}(\,4,\ 4,\text{-}7\,)\ \text{N}$$

$$= 100(\,4,\ 4\,,\text{-}7\,)\ \text{N}$$

Kraftmomentet med avseende på origo O blir

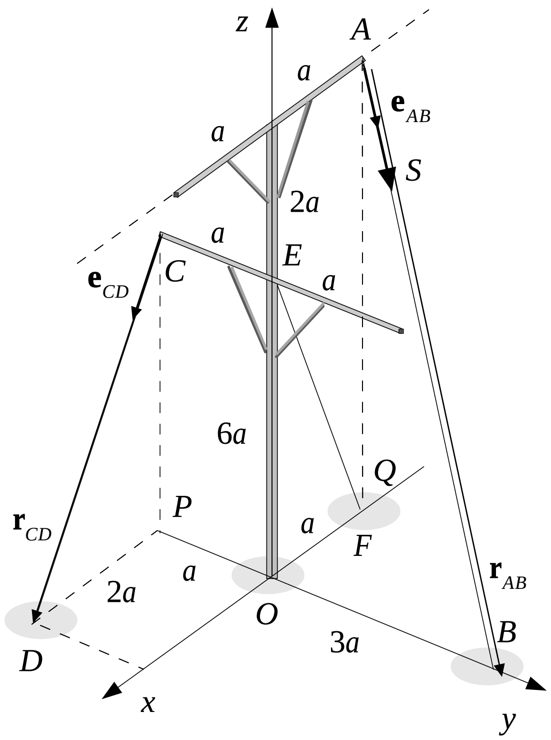
$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r}_{OA} \times \mathbf{S} \qquad \text{där} \qquad \mathbf{r}_{OA} = (\,0,\ 2\,,7\,)\ \text{m}$$

$$\mathbf{M}_O = 100\begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 0 & 2 & 7 \\ 4 & 4 & -7 \end{vmatrix}\ \text{Nm} = 100(\text{-}42,\,28,\,\text{-}\,8)\ \text{Nm} = 200(\text{-}21,\,14,\,\text{-}\,4)\ \text{Nm}$$

Kraftmomentet är

$$\mathbf{M}_O = \underline{\underline{200(\text{-}21,\,14,\,\text{-}\,4)\ \text{Nm}}}$$

LP 2.40



Kraftmomentet med avseende på punkten O beräknas enligt

$$\boxed{\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F}} \tag{1}$$

Här är

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_{OA} = (-a,\, 0,\, 8a) \tag{2}$$

och

$$\mathbf{F} = S\mathbf{e}_{AB} \tag{3}$$

Vi måste alltså först bestämma enhetsvektorn $\mathbf{e}_{AB}$.

$$\mathbf{r}_{AB} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A \tag{4}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{r}_{AB} = (0,\, 3a,\, 0) - (-a,\, 0,\, 8a) \tag{5}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{r}_{AB} = (a,\, 3a,\, -8a) \tag{6}$$

Denna vektor kan också bestämmas genom att i figuren gå från A till B längs koordinataxlarna.

$$\mathbf{e}_{AB} = \frac{\mathbf{r}_{AB}}{|\mathbf{r}_{AB}|} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{e}_{AB} = \frac{(a,\, 3a,\, -8a)}{|(a,\, 3a,\, -8a)|} \quad \Rightarrow \tag{7}$$

$$\mathbf{e}_{AB} = \frac{(1,\, 3,\, -8)}{|(1,\, 3,\, -8)|} = \frac{(1,\, 3,\, -8)}{\sqrt{1^2 + 3^2 + (-8)^2}} = \frac{1}{\sqrt{74}}(1,\, 3,\, -8) \tag{8}$$

Kraften på vektorform är alltså

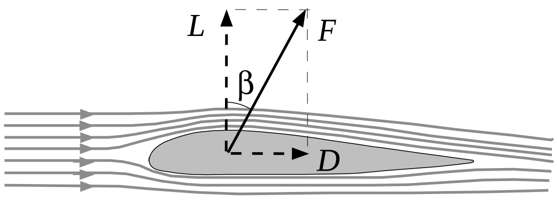
$$\mathbf{F} = S\mathbf{e}_{AB} = \frac{S}{\sqrt{74}}(1,\, 3,\, -8) \tag{9}$$

Insättning i (1) ger

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ -1 & 0 & 8 \\ 1 & 3 & -8 \end{vmatrix} \frac{aS}{\sqrt{74}} = (-24,\, 0,\, -3)\frac{aS}{\sqrt{74}}$$

$$M_z = \mathbf{M}_O \cdot \mathbf{e}_z = (-24,\, 0,\, -3)\frac{aS}{\sqrt{74}} \cdot (0,\, 0,\, 1) = -\frac{3aS}{\sqrt{74}}$$

LP 2.44



Två krafter med samma angreppspunkt kan ersättas av kraftsumman i samma punkt. Det är då kraftresultanten man bestämt, eftersom kraftmomentet med avseende på angreppspunkten inte förändras. Det är noll för båda systemen.

Kraftresultanten kan också förskjutas längs sin verkningslinje.

Kraftresultantens storlek fås med Pythagoras sats:

$$F = \sqrt{L^2 + D^2}$$

Vinkeln med vertikalen ges av

$$\tan\beta = \frac{D}{L}$$

Med de givna numeriska värdena fås

$$F = \sqrt{400^2 + 30^2}\ \text{N} = \sqrt{160000 + 900}\ \text{N} = \sqrt{160900}\ \text{N}$$

$$\Rightarrow \qquad \underline{\underline{F \approx 401\ \text{N}}}$$

$$\tan\beta = \frac{30}{400} \qquad \Rightarrow \qquad \tan\beta = \frac{3}{40}$$

$$\Rightarrow \qquad \underline{\underline{\beta \approx 4.29^\circ}}$$

LP 2.46

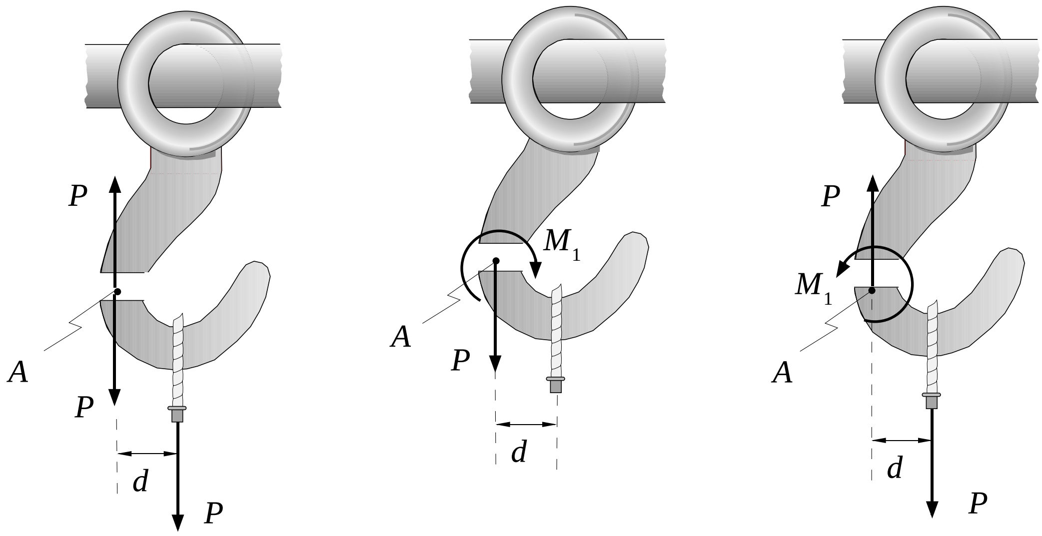


Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3

Vilken är verkan av kraften P (belastningen) i punkten A?

Ansätt i punkten A två krafter P med motsatta riktningar. Se figur 1!
Identifiera kraftparet och ersätt det med ett kraftparsmoment M_1 enligt figur 2, som visar belastningens verkan i punkten A.

Storleken av kraftparsmomentet är

$$M_1 = Pd$$

Det maximalt tillåtna värdet på M_1 är 3200 N.

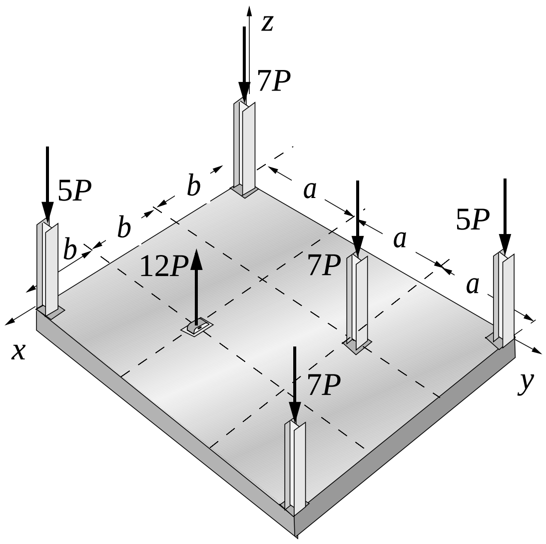
Det ger den maximala belastningen

$$P = \frac{M_1}{d} = \frac{3200 \text{ Nm}}{0.080 \text{ m}} = 80000 \text{ N}$$

Svar: Den maximala belastningen är $\underline{\underline{P = 80 \text{ kN}}}$

Kommentar: Figur 3 vill visa att om man sågar av (frilägger) kroken vid A, måste man ansätta ett kraftsystem enligt figuren för att den avsågade delen fortfarande skall vara i jämvikt.

LP 2.54



För att kunna bestämma *kraftresultanten*, som vi vet existerar för ett parallellkraftsystem, behöver man veta *resultanten* i någon punkt t ex origo. För det givna kraftsystemet är kraftsumman

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= \sum \mathbf{F}_k \\ &= (12P - 5P - 7P - 7P - 7P - 5P)\mathbf{e}_z \\ &= -19P\mathbf{e}_z\end{aligned} \tag{1}$$

Ingen av krafterna kan ge något kraftmoment i z-riktningen. Bestäm nu varje krafts kraftmoment, först med avseende på x-riktningen och sedan med avseende på y-riktningen. Alternativt beräknas varje kraftmoment med en determinant.

Kraftmomentet med avseende på O

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_O &= \sum \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k = (12P \cdot a - 7P \cdot 2a - 12P \cdot 3a)\mathbf{e}_x + (7P \cdot b - 12P \cdot 2b + 12P \cdot 3b)\mathbf{e}_y \\ &= -38Pa\,\mathbf{e}_x + 19Pb\,\mathbf{e}_y\end{aligned} \tag{2}$$

$\mathbf{F}$ och $\mathbf{M}_O$ bildar tillsammans *resultanten* i O.

Ersätt nu det givna kraftsystemet med en *kraftresultant*. Denna kraftresultant är lika med kraftsumman $\mathbf{F}$, som redan bestämts. Antag att dess angreppspunkt är $\mathbf{r} = (x,\ y,\ z)$. Kraftresultanten ska vara ekvimoment med det givna systemet och då måste den ge lika kraftmoment med avseende på origo som det givna kraftsystemet. Ekvationen blir

$$\underbrace{\mathbf{r} \times \mathbf{F}}_{\text{nya}} = \underbrace{\mathbf{M}_O}_{\text{givna}} \tag{3}$$

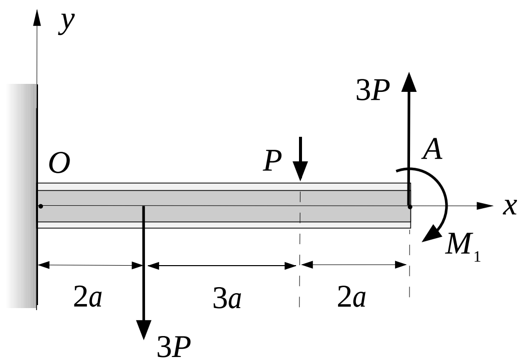
$$\begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ x & y & z \\ 0 & 0 & -19P \end{vmatrix} = (-38Pa,\ 19Pb,\ 0) \tag{4}$$

$$\begin{cases} -y \cdot 19P = -38Pa \\ x \cdot 19P = 19Pb \end{cases} \Rightarrow \quad x = b;\ \ y = 2a;\ \ z \text{ obestämd} \tag{5}$$

Kraftresultanten är $\quad \mathbf{F} = -19P\mathbf{e}_z$

med verkningslinjen $\quad x = b;\ \ y = 2a;\ \ z$ obestämd

LP 2.59



I problem där resultanten i en punkt eller kraftresultanten efterfrågas måste kraftsumman beräknas. Här är alla tre krafterna i y-riktningen. Två av krafterna bildar ett kraftpar.
Kraftsumman bestäms enligt:

$$\mathbf{F} = \sum \mathbf{F}_k = -3P\mathbf{e}_y - P\mathbf{e}_y + 3P\mathbf{e}_y$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{F} = -P\mathbf{e}_y$$

Kraftmomentet i origo O bestäms enligt den allmänna formeln

$$\mathbf{M}_O = \sum \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k + \sum \mathbf{C}_l$$

där den sista termen står för kraftparsmomenten.
På grund av den enkla geometrin beräknas kryssprodukterna som hävarm gånger kraft. Riktningen ges av högerregeln och vi får

a)

$$\mathbf{M}_O = (-2a \cdot 3P - 5a \cdot P + 7a \cdot 3P)\mathbf{e}_z - M_1\mathbf{e}_z$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{M}_O = (10Pa - M_1)\mathbf{e}_z \quad \Rightarrow$$

Resultanten i origo är alltså

$$\underline{\underline{\mathbf{F} = -P\mathbf{e}_y}} \;;\; \underline{\underline{\mathbf{M}_O = 3Pa\mathbf{e}_z}}$$

b) Kraftmomentet med avseende på punkten A bestäms på samma sätt:

$$\mathbf{M}_A = (5a \cdot 3P + 2a \cdot P + 0 \cdot 3P)\mathbf{e}_z - M_1\mathbf{e}_z$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{M}_A = (17Pa - M_1)\mathbf{e}_z$$

Resultanten i punkten A är alltså

$$\underline{\underline{\mathbf{F} = -P\mathbf{e}_y}} \;;\; \underline{\underline{\mathbf{M}_O = 10Pa\mathbf{e}_z}}$$

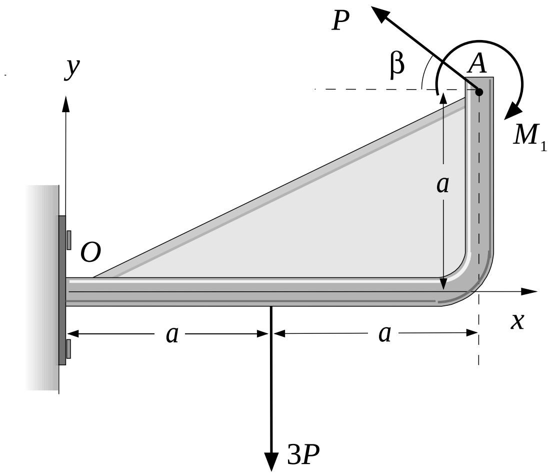
c) Kraftresultanten finns eftersom $\mathbf{F} \perp \mathbf{M}_O$. Antag att kraftresultanten har en angreppspunkt som ges av lägevektorn $\mathbf{r} = (x, y, z)$. Om det givna kraftsystemet ersätts av kraftresultanten måste kraftmomentet med avseende på origo vara detsamma:

$$\mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{M}_O$$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ x & y & z \\ 0 & -P & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, 3Pa) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -zP = 0 \\ 0 = 0 \\ -xP = 3Pa \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x = 3a;\; z = 0$$

Kraftresultanten är $\mathbf{F} = -P\mathbf{e}_y$ med en angreppspunkt som ligger på den räta linjen $x = 3a;\; z = 0;\; y$ obestämd.

LP 2.62



Dela upp kraften vid A i två komposante en horisontell och en vertikal.

Vi beräknar kraftsumman:

$$\mathbf{F} = \sum \mathbf{F}_k = -3P\mathbf{e}_y - P\cos\beta\mathbf{e}_x + P\sin\beta\mathbf{e}_y$$

$$\Rightarrow \qquad \mathbf{F} = \left(-P\cos\beta,\, P\sin\beta - 3P,\, 0\right)$$

Vinkeln β är given $\beta = 30°$,

$$\Rightarrow \qquad \mathbf{F} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{5}{2}, 0\right)P$$

Kraftmomentet i origo O bestäms enligt den allmänna formeln

$$\mathbf{M}_O = \sum \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k + \sum \mathbf{C}_l$$

där den sista termen står för kraftparsmomenten.

Här kan krafternas moment beräknas som hävarm gånger kraft. Riktningen ges av högerregeln och vi får

$$\mathbf{M}_O = \left(2a \cdot P\sin\beta + a \cdot P\cos\beta - a \cdot 3P\right)\mathbf{e}_z - M_1\mathbf{e}_z$$

$$\beta = 30° \Rightarrow \qquad \mathbf{M}_O = \left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 2\right)Pa - M_1\right]\mathbf{e}_z$$

Resultanten i origo är alltså

$$\mathbf{F} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{5}{2}, 0\right)P;\ \mathbf{M}_O = \left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 2\right)Pa - M_1\right]\mathbf{e}_z$$

b) Kraftresultanten finns eftersom $\mathbf{F} \perp \mathbf{M}_O$. Antag att kraftresultanten har en angreppspunkt som ges av lägevektorn $\mathbf{r} = (x, y, z)$. Om det givna kraftsystemet ersätts av kraftresultanten måste kraftmomentet med avseende på origo ändå bli detsamma:

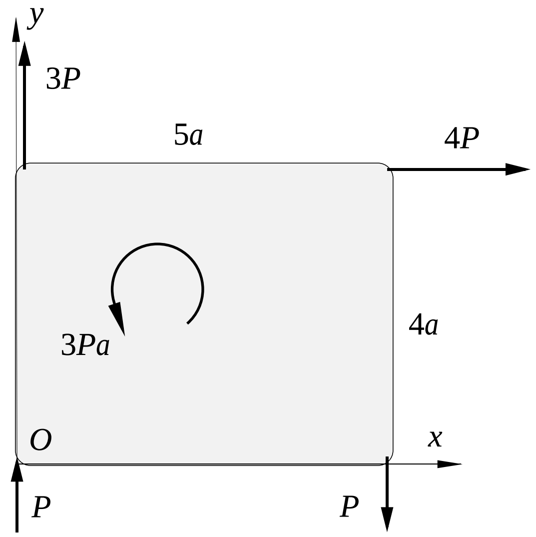
$$\mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{M}_O$$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ x & y & z \\ -\sqrt{3} & -5 & 0 \end{vmatrix} \frac{P}{2} = \left(0, 0, \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 2\right)Pa - M_1\right) \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} -zP = 0 \\ 0 = 0 \\ -xP = 3Pa \end{cases} \qquad \Rightarrow$$

$$x = 3a;\ z = 0;\ y \text{ obestämd}$$

Kraftresultanten är $\mathbf{F} = -P\,\mathbf{e}_y$ med en angreppspunkt som ligger på den räta linjen $x = 3a;\ z = 0;\ y$ obestämd.

LP 2.65



Kraftresultanten är alltid samma vektor som kraftsumman. I ett problem där kraftresultanten efterfrågas skall alltså des angreppspunkt bestämmas.
Kraftsumman bestäms enligt:

$$\mathbf{F} = \sum \mathbf{F}_k = 4P\mathbf{e}_x + P\mathbf{e}_y - P\mathbf{e}_y + 3P\mathbf{e}_y$$

$$\Rightarrow \qquad \mathbf{F} = 4P\mathbf{e}_x + 3P\mathbf{e}_y$$

I vilken punkt skall denna kraft angripa fö att kraftmomentet i någon punkt t ex orig ska bli detsamma som för det givna kraftsystemet? Kraftresultanten blir i så fa ekvimoment med det givna kraftsystemet

Vi beräknar kraftmomentet med avseende på origo för det givna kraftsystemet:

$$\mathbf{M}_O = \sum \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k + \sum \mathbf{C}_l$$

där den sista termen står för kraftparsmomenten.
I stället för med determinanter bestäms kryssprodukterna som hävarm gånger kraft. Riktningen ges av högerregeln och vi får

$$\mathbf{M}_O = (-4a \cdot 4P - 5a \cdot P)\mathbf{e}_z + 3Pa\,\mathbf{e}_z$$

$$\Rightarrow \qquad \mathbf{M}_O = -18Pa\,\mathbf{e}_z$$

Antag att kraftresultanten har en angreppspunkt som ges av lägevektorn $\mathbf{r} = (x, y, z)$. Om det givna kraftsystemet ersätts av kraftresultanten måste kraftmomentet med avseende på origo vara detsamma:

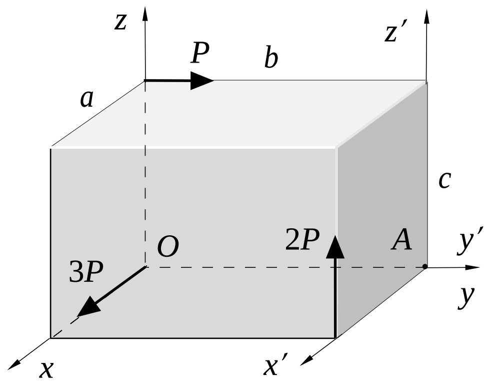
$$\mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{M}_O$$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ x & y & z \\ 4 & 3 & 0 \end{vmatrix} P = (0, 0, -18Pa) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -3zP = 0 \\ 4z = 0 \\ (3x - 4y)P = -18Pa \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$y = \frac{1}{4}(3x + 18a); \; z = 0$$

Kraftresultanten är $\mathbf{F} = 4P\mathbf{e}_x + 3P\mathbf{e}_y$ med en angreppspunkt som ligger på den räta linjen $y = \frac{1}{4}(3x + 18a); \; z = 0$.

LP 2.67



För det givna kraftsystemet är kraftsumman

$$\mathbf{F} = \sum \mathbf{F}_k = 3P\mathbf{e}_x + P\mathbf{e}_y + 2P\mathbf{e}_z$$

eller

$$\mathbf{F} = (3,\ 1,\ 2)P$$

Vid bestämning av kraftmomentet med avseende på A kan man tänka sig ett koordinatsystem $Ax'y'z'$ med origo i A.

Kraften P ger bara moment kring x'-axeln eftersom den är parallell med y'-axeln och verkningslinjen skär z'-axeln.

Kraften $3P$ ger bara moment kring z'-axeln eftersom den är parallell med x'-axeln och verkningslinjen skär y'-axeln.

Kraften $2P$ ger bara moment kring y'-axeln eftersom den är parallell med z'-axeln och verkningslinjen skär x'-axeln.

Om angreppspunkterna är Q_k så blir kraftmomentet med avseende på A

$$\mathbf{M}_A = \sum \mathbf{r}_{AQ_k} \times \mathbf{F}_k = -P \cdot c\,\mathbf{e}_x - 2P \cdot a\,\mathbf{e}_y + 3P \cdot b\,\mathbf{e}_z$$

Resultanten i punkten A är alltså

$$\mathbf{F} = (3,\ 1,\ 2)P$$

$$\mathbf{M}_A = (-c, -2a, 3b)P$$

Kraftresultant existerar om

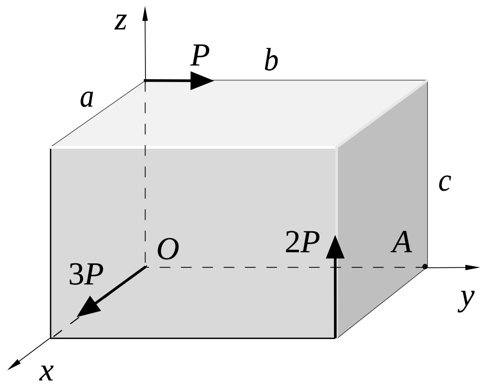
$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{M}_A = 0.$$

Skalärprodukten är här $\mathbf{F} \cdot \mathbf{M}_A = (3,\ 1,\ 2)P \cdot (-c, -2a, 3b)P$

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{M}_A = (\text{-}3c - 2a + 6b)P^2$$

Kraftresultanten existerar alltså om $-3c - 2a + 6b = 0$.

LP 2.68



För det givna kraftsystemet är kraftsumman

$$\mathbf{F} = \sum \mathbf{F}_k = 3P\mathbf{e}_x + P\mathbf{e}_y + 2P\mathbf{e}_z$$

eller

$$\mathbf{F} = (3,\ 1,\ 2)P$$

Vid bestämning av kraftmomentet med avseende på O kan noteras att

kraften P ger bara moment kring x-axeln eftersom den är parallell med y-axeln och verkningslinjen skär z-axeln.

Kraften $3P$ ger inget med avseende på O verkningslinjen går genom O.

Kraften $2P$ ger inget moment med avseende på z-axeln eftersom den är parallell med z-axeln.

Kraftmomentet med avseende på O blir.

$$\mathbf{M}_O = \sum \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k = (2P \cdot b - P \cdot c)\mathbf{e}_x - 2P \cdot a\,\mathbf{e}_y$$

Resultanten i punkten O är alltså

$$\mathbf{F} = (3,\ 1,\ 2)P$$
$$\mathbf{M}_O = ((2b - c)P, -2P \cdot a, 0)$$

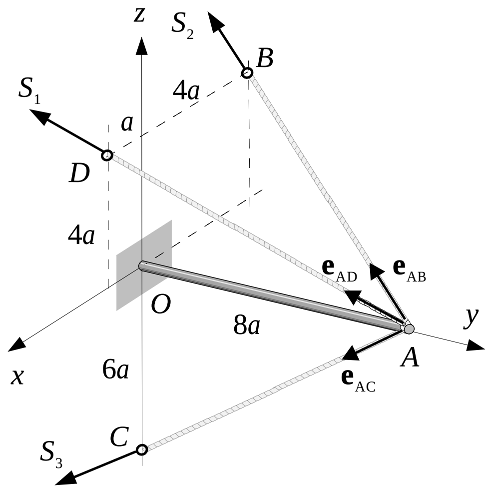
Antag att kraftsumman $\mathbf{F}$ angriper i en punkt med lägevektorn $\mathbf{r} = (x,\ y,\ z)$. För att kraftsumman skall kunna ersätta alla krafter måste den ge samma moment som de ursprungliga krafterna.

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ x & y & z \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} P = (2b - c,\ -2a,\ 0)$$

$$(2y - z)P = 2b - c$$
$$(3z - 2x)P = -2a$$
$$(x - 3y)P = 0$$

LP 2.71



Trådkrafterna bildar ett strålkraftsystem, eftersom alla verkningslinjer har en skärningspunkt i A.

För att kunna vektoraddera krafterna måste vi skriva dem som vektorer. Bestäm först enhetsvektorerna i verkningslinjernas riktningar!

$$\mathbf{r}_{AD} = \mathbf{r}_D - \mathbf{r}_A = (1,0,4)a - (0,8,0)a = (1,-8,4)a$$

$$\mathbf{e}_{AD} = \frac{\mathbf{r}_{AD}}{|\mathbf{r}_{AD}|} = \frac{(1,-8,4)a}{|(1,-8,4)a|} = \frac{(1,-8,4)}{\sqrt{1+64+16}} = \frac{1}{9}(1,-8,4)$$

På samma sätt fås

$$\mathbf{e}_{AB} = \frac{\mathbf{r}_{AB}}{|\mathbf{r}_{AB}|} = \frac{(-4,-8,4)a}{|(-4,-8,4)a|} = \frac{(-1,-2,1)}{|(-1,-2,1)|} = \frac{(-1,-2,1)}{\sqrt{1+4+1}} = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,-2,1)$$

$$\mathbf{e}_{AC} = \frac{\mathbf{r}_{AC}}{|\mathbf{r}_{AC}|} = \frac{(0,-8,-6)a}{|(0,-8,-6)a|} = \frac{(0,-4,-3)}{|(0,-4,-3)|} = \frac{1}{\sqrt{16+9}}(0,-4,-3) = \frac{1}{5}(0,-4,-3)$$

Kraftsumman är

$$\mathbf{F} = \sum \mathbf{F}_k = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 + \mathbf{S}_3 = S_1\mathbf{e}_{AD} + S_2\mathbf{e}_{AB} + S_3\mathbf{e}_{AC}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{F} = 9P\cdot\frac{1}{9}(1,-8,4) + 3\sqrt{6}P\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,-2,1) + 10P\cdot\frac{1}{5}(0,-4,-3)$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{F} = (1,-8,4)P + (-3,-6,3)P + (0,-8,-6)P$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{F} = (-2,-22,1)P$$

Eftersom kraftmomentet i A är noll för strålkraftsystemet består resultanten i denna punkt av enbart kraftsumman $\mathbf{F} = (-2,-22,1)P$. Kraftresultantens verkningslinje går genom punkten A.

b) Kraftmomentet i punkten B fås enklast med sambandsformeln

$$\mathbf{M}_B = \mathbf{M}_A + \mathbf{r}_{BA} \times \mathbf{F}$$

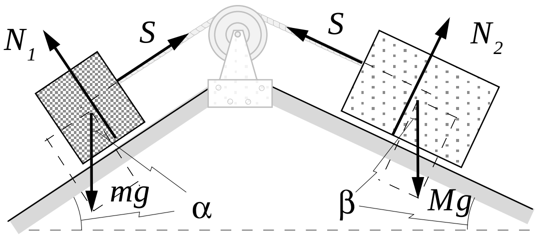
Insättning ger

$$\mathbf{M}_B = \mathbf{0} + \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 4 & 8 & -4 \\ -2 & -22 & 1 \end{vmatrix} Pa = (-80,\ 4,\ -72)Pa$$

Resultanten i punkten B är $\underline{\underline{\mathbf{F} = (-2,-22,1)P}}$; $\underline{\underline{\mathbf{M}_B = (-80,\ 4,\ -72)Pa}}$

Statik Problemsamling 3

LP 3.1



Antag att den högra lådans massa är M. Frilägg båda lådorna!

Friläggningsfiguren, som skall innehålla praktiskt taget all information som behövs för att lösa problemet, visas här.

Kontaktkrafterna mot de lutande planen är normalkrafter, N_1 och N_2, eftersom friktionskrafter saknas enligt texten.

Trådkraften S är lika på båda sidor om trissan, eftersom den är lättrörlig.

Jämvikt fordrar att kraftsystemet på varje låda bildar ett *nollsystem*, dvs kraftsumman är nollvektorn och kraftmomentet med avseende på någon punkt är nollvektorn. Vi projicerar kraftekvationen i planens riktningar:

vänstra lådan $\nearrow$: $\quad S - mg\sin\alpha = 0 \quad (1)$

högra lådan $\nwarrow$: $\quad S - Mg\sin\beta = 0 \quad (2)$

$$\Rightarrow \quad mg\sin\alpha = Mg\sin\beta \quad \Rightarrow \quad M = \frac{mg\sin\alpha}{g\sin\beta} \qquad (3)$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{M = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}m}} \qquad (4)$$

Kommentar:

Svaret är dimensionsriktigt.

Specialfall är $\quad \alpha = \beta \quad \Rightarrow \quad M = m$

$\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad M = 0,$

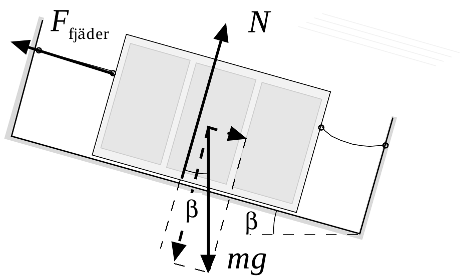
vilket betyder att jämvikten då inte är möjlig för två lådor.

$\beta \to 0 \quad \Rightarrow \quad M \to \infty,$

vilket betyder att det fordras i princip en fast punkt att fästa tråden i.

Normalkrafterna bestäms ur kraftekvationerna vinkelrätt mot de lutande planen. Momentekvationerna för vardera lådan ger normalkrafternas verkningslinjer, som måste gå genom skärningspunkten för trådkraftens och tyngdkraftens verkningslinjer (se figur!).

LP 3.3



Frilägg containern från fjädern och underlaget! Inför motsvarande krafter, fjäderkraften och normalkraften! Fjäderkraften är

$$F_{\text{fjäder}} = k\Delta l \qquad (1)$$

där $F_{\text{fjäder}} = k\Delta l$ är förlängningen av fjädern räknat från den naturliga längden.

Jämvikt fordrar att kraftsystemet på containern bildar ett *nollsystem*, dvs kraftsumman är nollvektorn och kraftmomentet med avseende på någon punkt är nollvektorn. Vi projicerar kraftekvationen i normalkraftens och fjäderkraftens riktningar:

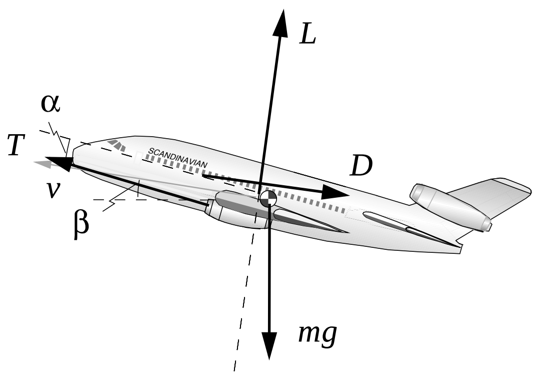
$$\nwarrow: \quad F_{\text{fjäder}} - mg\sin\beta = 0 \qquad (2)$$

$$\nearrow: \quad N - mg\cos\beta = 0 \qquad (3)$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{F_{\text{fjäder}} = mg\sin\beta}} \qquad \underline{\underline{N = mg\cos\beta}}$$

Trådens förlängning är enligt sambandet (1) $\quad \underline{\underline{\Delta l = \dfrac{mg}{k}\sin\beta}}$

LP 3.4



Konstant hastighet motsvarar ett jämviktstillstånd. Då fordras att kraftsystemet på flygplanet bildar ett *nollsystem*, dvs kraftsumman är nollvektorn och kraftmomentet med avseende på någon punkt är nollvektorn. Vi projicerar nu kraftekvationen i motståndskraftens och lyftkraftens riktningar:

$$\leftarrow: \quad T\cos\alpha - D - mg\sin\beta = 0 \qquad (1)$$

$$\nearrow: \quad T\sin\alpha + L - mg\cos\beta = 0 \qquad (2)$$

Lös ut först $\sin\alpha$ och $\cos\alpha$ ur dessa ekvationer och bilda sedan $\tan\alpha$!

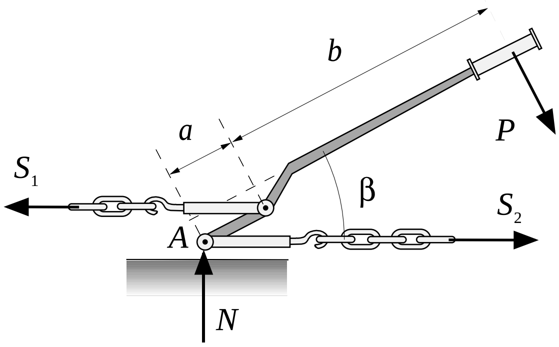
$$\underline{\underline{\tan\alpha = \frac{mg\cos\beta - L}{D + mg\sin\beta}}}$$

För att bestämma T kan vi ur (2) och (3) först bilda $T^2\cos^2\alpha$ respektive $T^2\sin^2\alpha$. Summan blir enligt "trigonometriska ettan" T^2.

$$\Rightarrow \quad T^2\left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right) = \left(mg\cos\beta - L\right)^2 + \left(D + mg\sin\beta\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{T = \sqrt{\left(mg\cos\beta - L\right)^2 + \left(D + mg\sin\beta\right)^2}}}$$

LP 3.5



Kontaktytan vid A är glatt. Om kraftsystemet kompletteras med normalkraften N har vi en friläggningsfigur.

Vi antar att systemets massa kan försummas, dvs att tyngden är försumbar jämfört med de krafter som skall bestämmas.

Hävstångens idé gör att vi förväntar oss att kraften P är mindre än spännkrafterna i kedjorna.

Jämvikt för det frilagda systemet fordrar:

$$\rightarrow: \quad -S_1 + S_2 + P\sin\beta = 0 \tag{1}$$

$$\uparrow: \quad N - P\cos\beta = 0 \tag{2}$$

$$\curvearrowleft A: \quad a\sin\beta \cdot S_1 - 0\cdot S_2 - (a+b)\cdot P = 0 \tag{3}$$

Ekv (3) ger

$$\underline{\underline{P = \frac{a\sin\beta}{(a+b)} S_1}} \tag{4}$$

Ekv (1) ger

$$S_2 = S_1 - \frac{a\sin\beta}{(a+b)} S_1 \cdot \sin\beta \tag{5}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{S_2 = \left(1 - \frac{a\sin^2\beta}{(a+b)}\right) S_1}} \tag{6}$$

Kommentar:

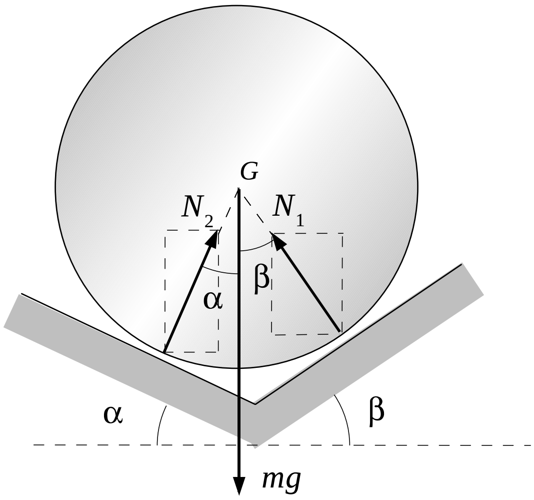
Svaren är helt klart dimensionsriktiga. En trigonometrisk funktion har dimensionen ett.

För vinkeln $\beta = \pi/2$ är kraften P horisontell och storleken måste vara lika med skillnaden i spännkrafternas storlek. För denna vinkel fås den kraftförstoring, som man förväntar sig av hävstången, nämligen

$$\frac{P}{S_1} = \frac{a}{a+b}$$

För vinkeln $\beta = 0$ är kraften P vertikal och spännkrafternas storlek är enligt ekv (6) lika. Ekv (4) säger att det behövs en mycket liten kraft P för att hålla en viss spännkraft S_1.

LP 3.6



Frilägg cylindern från underlaget! Den påverkas av tyngdkraften mg och de två normalkrafterna N_1 och N_2.
Jämvikt för den frilagda kroppen fordrar:

$$\rightarrow: \quad -N_1 \sin\beta + N_2 \sin\alpha = 0 \qquad (1)$$

$$\uparrow: \quad N_1 \cos\beta + N_2 \cos\alpha - mg = 0 \qquad (2)$$

Momentjämvikt kräver att alla tre kraft-erna går genom centrumpunkten G.
Med ekv (1) kan vi uttrycka N_2 i N_1:

$$N_2 = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} N_1 \qquad (3)$$

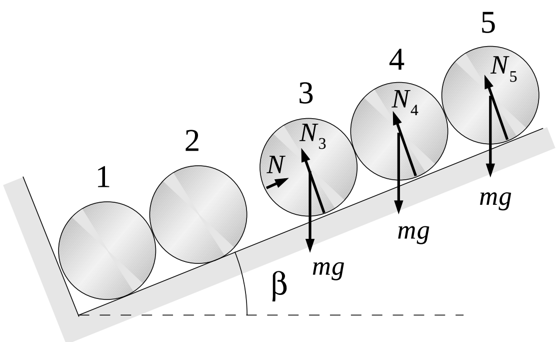
Insättning i (2) ger

$$N_1 \cos\beta + N_1 \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} \cos\alpha = mg$$

$$N_1 (\sin\alpha \cos\beta + \sin\beta \cos\alpha) = mg \sin\alpha \quad \Rightarrow$$

$$\underline{\underline{N_1 = \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} mg}}; \qquad \underline{\underline{N_2 = \frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} mg}}$$

LP 3.7



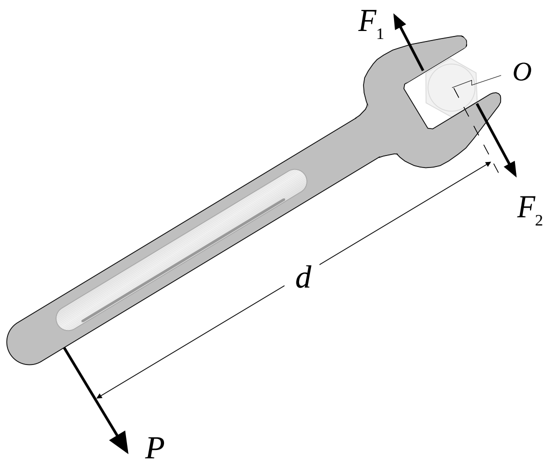
Frilägg de tre översta cylindrarna. Detta system påverkas av de yttre krafterna mg (tre stycken), en normalkraft N samt de tre normalkrafterna N_3, N_4 och N_5.
För att bestämma kraften N behövs bara en ekvation.

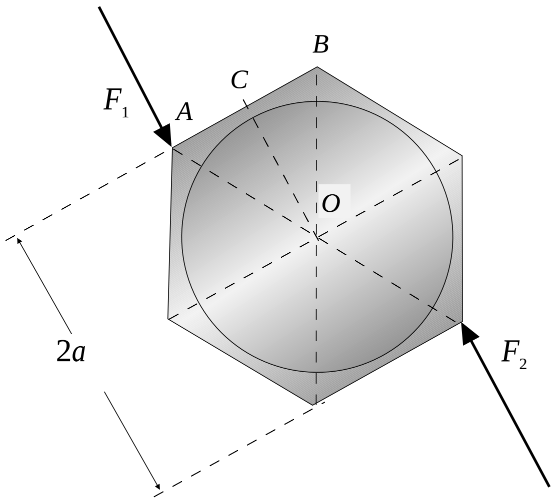
Jämvikt för det frilagda systemet fordrar:

$$\nearrow: \quad N - 3mg \sin\beta = 0 \qquad (1)$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{N = 3mg \sin\beta}}$$

LP 3.9





Frilägg nyckeln och muttern. Muttern påverkas av krafterna F_1 och F_2 från nyckeln samt en reaktionskraft och ett kraftparsmoment från gängan. Nyckeln påverkas av krafterna F_1 och F_2 från muttern samt kraften P från handen. Avståndet mellan verkningslinjerna för F_1 och F_2 är enligt geometrin (med liksidiga, likvinkliga trianglar) $2a/\sqrt{3}$.

Jämvikt för den frilagda nyckeln fordrar:

$$\rightarrow: \quad F_1 - F_2 - P = 0 \qquad (1)$$

$$\curvearrowleft O: \quad P \cdot d - F_2 \cdot \frac{a}{\sqrt{3}} - F_1 \cdot \frac{a}{\sqrt{3}} = 0 \qquad (2)$$

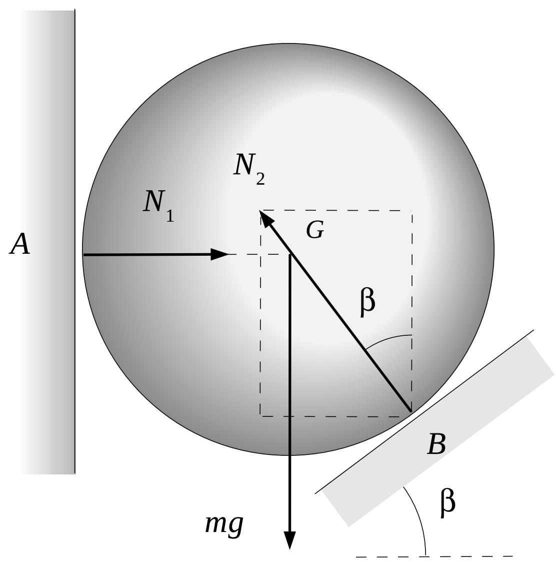
Dividera ekv (2) med $a/\sqrt{3}$ och addera sedan de två ekvationerna!

$$F_1 - F_2 - P + P \cdot \frac{\sqrt{3}\,d}{a} - F_2 - F_1 = 0$$

$$\underline{\underline{F_2 = \left(\frac{d\sqrt{3}}{a} - 1\right)\frac{P}{2}}}$$

Då ger ekv (1) $\underline{\underline{F_2 = \left(\frac{d\sqrt{3}}{a} + 1\right)\frac{P}{2}}}$

LP 3.10



Frilägg klotet från väggen och det lutande planet! Det påverkas av tyngdkraften mg och normalkrafterna N_1 och N_2. Jämvikt för den frilagda kroppen fordrar:

$$\rightarrow: \quad N_1 - N_2 \sin\beta = 0 \qquad (1)$$

$$\uparrow: \quad N_2 \cos\beta - mg = 0 \qquad (2)$$

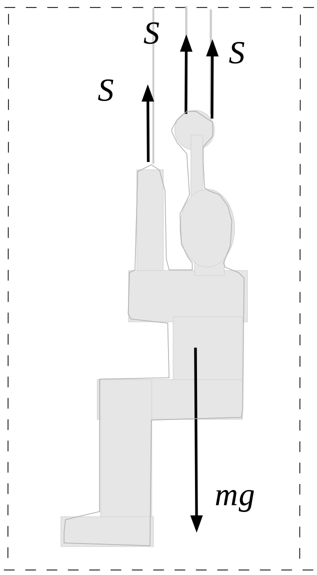
Momentjämvikt kräver att alla tre krafterna går genom centrumpunkten G.

Ekv (2) ger $N_2 = \dfrac{mg}{\cos\beta}$

Insättning i (1) ger $N_1 = \dfrac{mg}{\cos\beta}\sin\beta$

Resultatet är alltså $\underline{\underline{N_1 = mg\tan\beta}}$; $\underline{\underline{N_2 = \dfrac{mg}{\cos\beta}}}$

LP 3.11



Frilägg systemet man+stol+nedre trissan! Antag att mannen drar med kraften S i linan. Denna trådkraft är lika stor i alla delar av tråden. Det motiveras av att trissorna är lätta och lättrörliga och därför måste momentekvationen med avseende på varje trissas centrum vara noll.

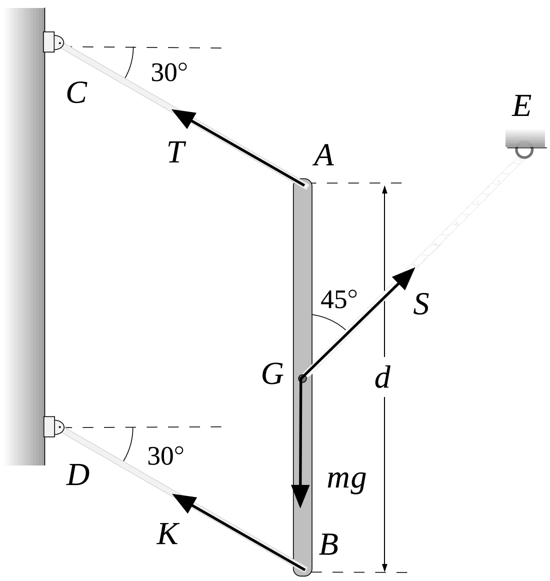
Jämvikt för det frilagda systemet fordrar:

$$\uparrow \; : \quad 3S - mg = 0 \qquad (1)$$

Momentjämvikt kräver att alla tre krafterna går genom centrumpunkten G.

Ekv (1) ger $\underline{\underline{S = \frac{1}{3} mg}}$

LP 3.12



Stängerna AC och BD är lätta och måste då vara tvåkraftskroppar. Kontaktkrafternas verkningslinjer måste då gå genom ändpunkterna. Frilägg stången AB och inför krafterna mg, S, T och K enligt figuren!

Jämvikt för den frilagda kroppen fordrar:

$$\rightarrow : \quad \frac{\sqrt{2}}{2} S - \frac{\sqrt{3}}{2} T - \frac{\sqrt{3}}{2} K = 0 \qquad (1)$$

$$\uparrow \; : \quad \frac{1}{2} T + \frac{1}{2} K + \frac{\sqrt{2}}{2} S - mg = 0 \qquad (2)$$

$$\circlearrowleft G : \quad \frac{d}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} T - \frac{d}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} K = 0 \qquad (3)$$

Ekv (3) ger $\quad T = K \qquad (4)$

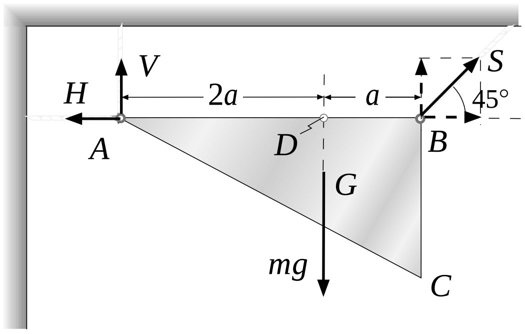
Ekv (1) ger då $\quad K = \dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} S \qquad (5)$

Insättning i (2) ger $\quad \dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} S + \dfrac{\sqrt{2}}{2} S - mg = 0 \qquad (6)$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{3}} \right) S = mg; \qquad \Rightarrow \quad \underline{\underline{S = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{6}} mg}}$$

Anm.: Resultatet kan fås direkt om man projicerar kraftekvationen på en riktning som är vinkelrät mot de lätta stängerna.

LP 3.13



I detta problem ingår egentligen en masscentrumberäkning om man inte slår upp i en tabell. För en triangel ligger masscentrum på avståndet en tredjedel av höjden från basen räknat. Se appendix i problemsamlingen! Tre obekanta krafter söks. Vi måste alltså ställa upp tre ekvationer.

Frilägg plåtskivan! Jämvikt för den frilagda plåtskivan fordrar:

$$\rightarrow: \quad -H + \frac{\sqrt{2}}{2}S = 0 \qquad (1)$$

$$\uparrow: \quad V + \frac{\sqrt{2}}{2}S - mg = 0 \qquad (2)$$

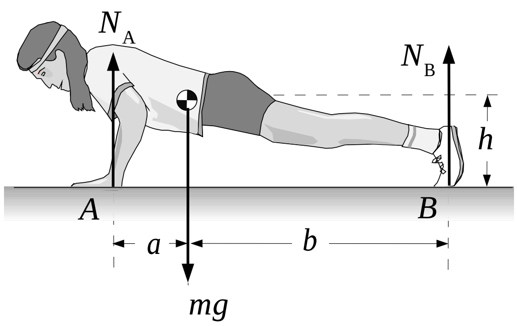
$$\curvearrowleft D: \quad -2a \cdot V + a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}S = 0 \qquad (3)$$

Enligt ekv(1) och (3) är $\quad H = \frac{\sqrt{2}}{2}S$ och $V = \frac{\sqrt{2}}{4}S \qquad (4)$

Insättning i ekv(2) ger $\quad \frac{\sqrt{2}}{4}S + \frac{\sqrt{2}}{2}S = mg \quad \Rightarrow \quad S = \frac{4}{3\sqrt{2}}mg \qquad (5)$

Svar: $\quad \underline{\underline{H = \frac{2}{3}mg}}, \quad \underline{\underline{S = \frac{1}{3}mg}}, \quad \underline{\underline{S = \frac{4}{3\sqrt{2}}mg}}$

LP 3.14



Frilägg personen och inför normalkrafterna N_A och N_B! Långsam armhävning betyder att accelerationen är försumbar och att varje läge kan ses som ett jämviktsläge.

Jämvikt fordrar:

$$\uparrow: \quad N_A + N_B - mg = 0 \qquad (1)$$

$$\curvearrowleft A: \quad N_B \cdot (a+b) - mg \cdot a = 0 \qquad (2)$$

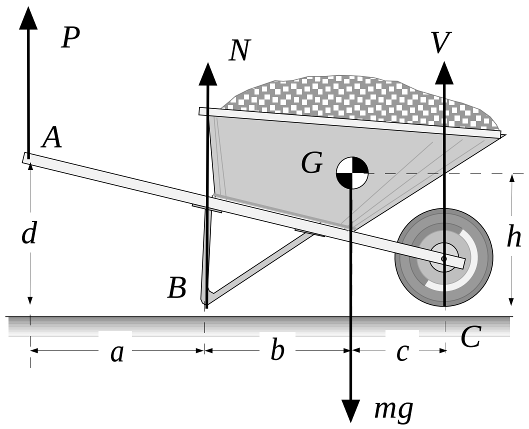
Momentjämvikt kräver att alla tre krafterna går genom centrumpunkten G.

Ekv (2) ger $\quad N_B = \frac{a}{a+b}mg$

Ekv (1) ger då $\quad N_A = \frac{b}{a+b}mg$

Man kan också i stället för ekv (1) ställa upp momentekvationen med avseende på B, vilket mer direkt ger resultatet.
Speciellt för fallet $b = 3a$ fås $N_B = mg/4$; $N_A = 3mg/4$.

LP 3.15



Frilägg skottkärran och inför reaktionskrafterna vid B och C! Krafterna P och mg är vertikala. Eftersom hjulet är fritt rörligt och kontaktkraften vid C saknar en horisontell komposant så är också kontaktkraften vid B vertikal.

Om $N = 0$ så kan $P_{\min}$ bestämmas med momentekvationen med avseende på C:

$$mg \cdot c - P_{\min} \cdot (a+b+c) = 0 \quad \Rightarrow$$

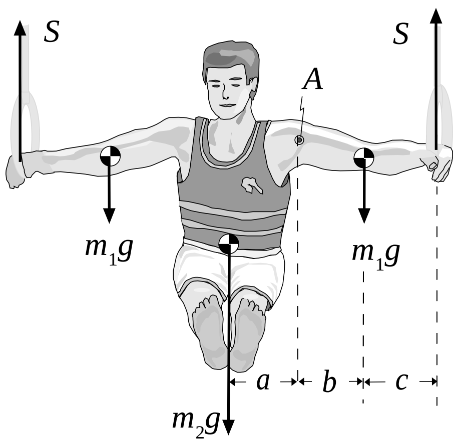
$$\underline{\underline{P_{\min} = \frac{c}{a+b+c} mg}}$$

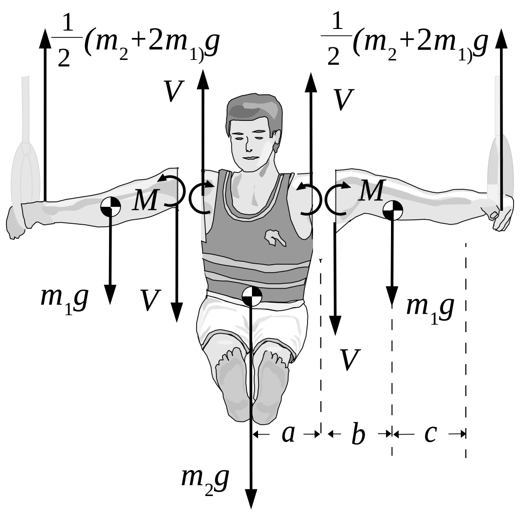
$$mg \cdot c - P_{\min} \cdot (a+b+c) = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{P_{\min} = \frac{c}{a+b+c} mg}}$$

Om $P = 0$ så kan N bestämmas med momentekvationen med avseende på C:

$$mg \cdot c - N \cdot (b+c) = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{N = \frac{c}{b+c} mg}}$$

LP 3.16





Frilägg gymnasten från ringarna!
Jämvikt för hela gymnasten fordrar att de vertikala krafterna på händerna tar upp hela tyngden.

$$\uparrow: \quad 2S - m_2g - 2m_1g = 0 \tag{1}$$

$$S = m_1g + \frac{1}{2} m_2g \tag{2}$$

Frilägg armarna från resten av kroppen och inför kraften V och kraftparsmomentet M.
Jämvikt för resten av kroppen fordrar

$$\uparrow: \quad 2V - m_2g = 0 \tag{3}$$

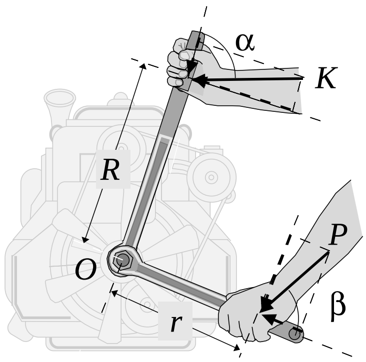
$$\underline{\underline{V = \frac{1}{2} m_2g}} \tag{4}$$

Jämvikt fordrar nu för vänsterarmen (den högra i figuren)

$$\curvearrowleft A: \left(m_1 + \frac{1}{2} m_2\right) g(b+c) - m_1gb + M = 0 \tag{5}$$

$$\underline{\underline{M = -\frac{1}{2} m_2g(b+c) - m_1gc}}$$

LP 3.17



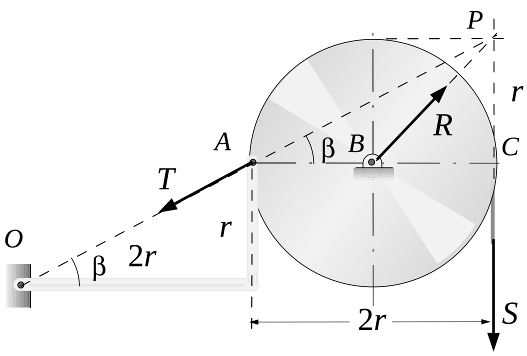
Vi förutsätter att skruven O sitter fast. Jämvikt fordrar att kraftmomentet med avseende på en axel genom O vinkelrät mot figurens plan är noll:
Dela upp krafterna K och P i komposanter parallella och vinkelräta mot nycklarna. Det är bara komposanterna som är vinkelräta mot nycklarna som ger ett kraftmoment.

$$\circlearrowleft O: \; K\sin\alpha \cdot R - P\sin\beta \cdot r = 0 \qquad (1)$$

$$\underline{\underline{K = \frac{r\sin\beta}{R\sin\alpha}P}}$$

Numeriskt fås $\quad K = \dfrac{0.3\cdot 2\cdot 2}{0.4\cdot 3}60 \text{ N} = 60 \text{ N}$

LP 3.18



Vinkelstången OA är en tvåkraftskropp så att kontaktkraften i A måste ha en verkningslinje som går genom O.

Frilägg nu cylindern från vinkelstången och den glatta axeln vid B. Inför motsvarande krafter T och R. Krafterna T och S har kända riktningar. Eftersom cylindern är en trekraftskropp måste reaktionskraften R ha en riktning genom P. Om figuren ritas på detta sätt har vi indirekt ställt upp momentekvationen, eftersom den kräver att momentet skall vara noll med avseende på P.

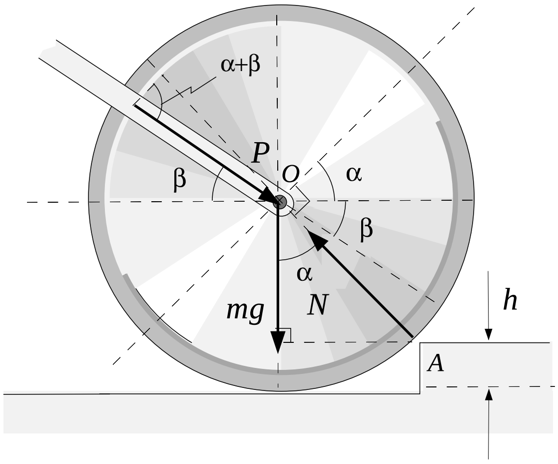
Jämvikt fordrar också att

$$\circlearrowleft A: \; \frac{R}{\sqrt{2}}\cdot r - S\cdot 2r = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{R = 2\sqrt{2}\,S}} \qquad (1)$$

$$\circlearrowleft B: \; T\sin\beta\cdot r - S\cdot r = 0 \qquad (2)$$

Men geometrin ger $\quad \sin\beta = \dfrac{r}{r\sqrt{5}} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{T = \sqrt{5}\,S}}$

LP 3.19



Betrakta ett jämviktsläge då kroppen just lättat från underlaget och bara vilar mot kanten vid A. Frilägg välten!

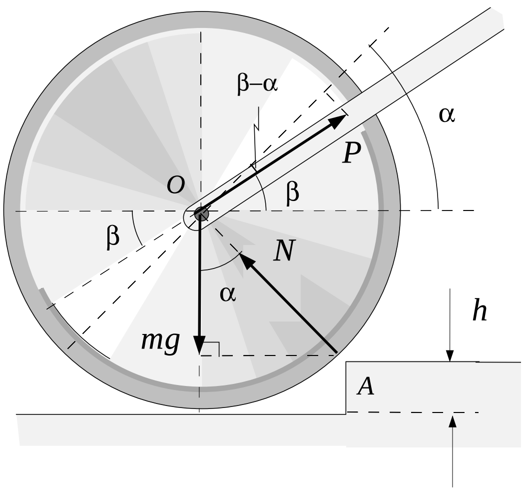
Om cylindern roterar lätt finns bara en normalkraft N vid A. Den har sin verkningslinje genom centrum O. De övriga krafterna är tyngdkraften mg och dragkraften P. Välten är en trekraftskropp. Krafternas verkningslinjer går genom O. (Om en friktionskraft skulle existera vid A måste den också motsvaras av ett kraftparsmoment på grund av friktion vid axeln O.)

Inför den vinkel α som radien OA (eller normalkraften N) bildar med vertikalen. Med en kraftekvation i en riktning vinkelrät mot OA kan normalkraften vid A elimineras direkt.

Jämvikt fordrar:

$$P\cos(\beta+\alpha) - mg\sin\alpha = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \underline{\underline{P = \frac{mg\sin\alpha}{\cos(\beta+\alpha)}}}$$

LP 3.20



Betrakta ett jämviktsläge då kroppen just lättat från underlaget och bara vilar mot kanten vid A. Frilägg välten!

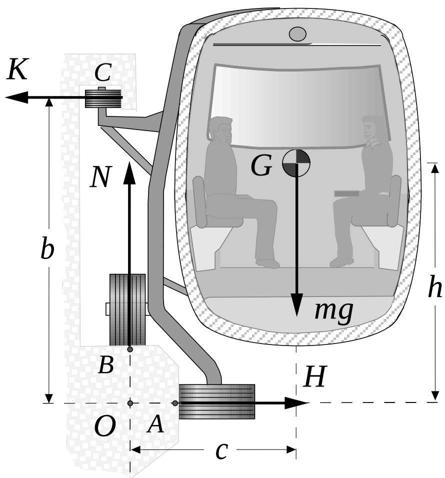
Om cylindern roterar lätt finns bara en normalkraft N vid A. Den har sin verkningslinje genom centrum O. De övriga krafterna är tyngdkraften mg och dragkraften P. Välten är en trekraftskropp. Krafternas verkningslinjer går genom O. (Om en friktionskraft skulle existera vid A måste den också motsvaras av ett kraftparsmoment på grund av friktion vid axeln O.)

Inför den vinkel α som radien OA (eller normalkraften N) bildar med vertikalen. Med en kraftekvation i en riktning vinkelrät mot OA kan normalkraften vid A elimineras direkt.

Jämvikt fordrar:

$$P\cos(\beta-\alpha) - mg\sin\alpha = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \underline{\underline{P = \frac{mg\sin\alpha}{\cos(\beta-\alpha)}}}$$

LP 3.21



Frilägg vagnen från kontaktytorna där friktionskrafterna är försumbara.

Jämvikt fordrar:

$$\rightarrow: \quad H - K = 0$$

$$\uparrow: \quad N - mg = 0$$

$$\curvearrowleft O: \quad K \cdot b - mg \cdot c = 0$$

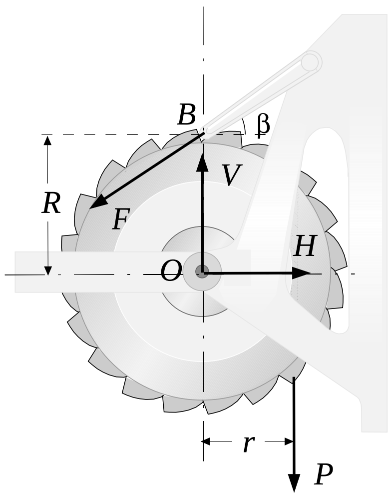
$$\Rightarrow \quad N = mg$$

$$H = K = \frac{c}{b} mg$$

Nu var det två par av varje hjul så om normalkrafterna på enstaka hjul söks så är de

$$\underline{\underline{N_B = \frac{mg}{2}}} \qquad \underline{\underline{N_A = N_C = \frac{c}{2b} mg}}$$

LP 3.22



Frilägg vinschtrumman från spärren och rotationsaxeln. Spärren är lätt och därför en tvåkraftskropp. Kraften F måste gå i samma riktning som spärren AB.
Vi förutsätter en glatt rotationsaxel.

Jämvikt fordrar:

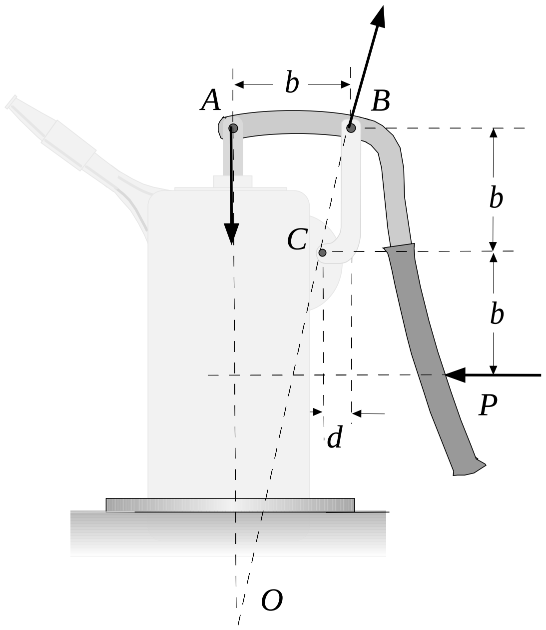
$$\curvearrowleft B: \quad H \cdot R - P \cdot r = 0$$

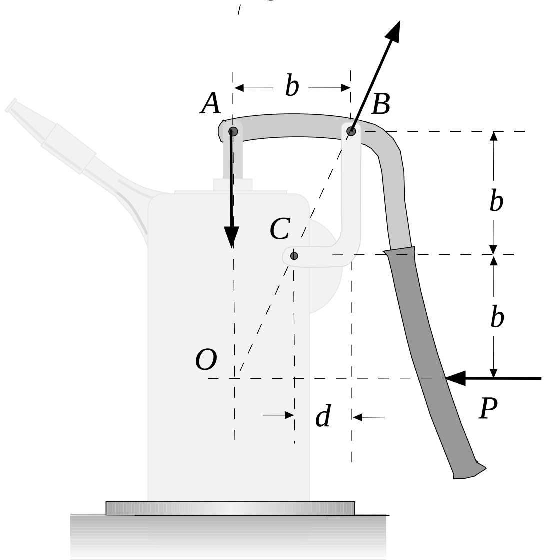
$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{H = \frac{r}{R} P}}$$

$$\curvearrowleft C: \quad V \cdot \frac{R}{\tan\beta} - P \cdot \left(r + \frac{R}{\tan\beta} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{V = \frac{r\tan\beta + R}{R} P}}$$

LP 3.23





Frilägg handtaget! Det påverkas av kraften P samt reaktionskrafter i lederna A och B. I leden A förutsätter vi enligt problemtexten att kraften är vertikal.

Vilken riktning har kraften i B?
Jo, eftersom länkarmen BC är en två-kraftskropp måste kraftens verkningslinje gå genom C. Se figur 1!

Men handtaget är en trekraftskropp. Det betyder att verkningslinjen också måste gå genom de andra två verkningslinjernas skärningspunkt O. Se figur 2!

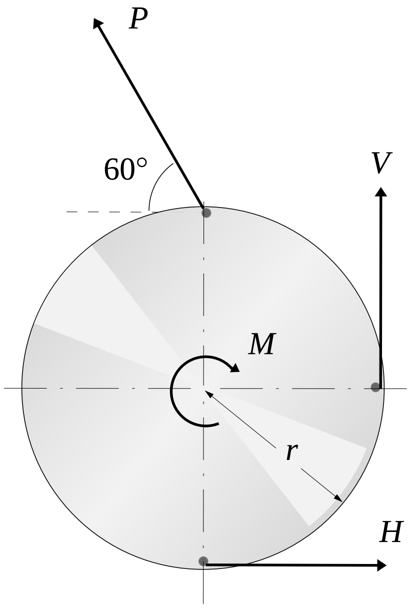
Likformighet ger

$$\frac{d}{b} = \frac{b}{2b} \quad \Rightarrow$$

$$\underline{\underline{d = \frac{b}{2}}}$$

Observera att det är momentekvationen som blir satisfierad genom detta geometriska resonemang. Kraftmomentet med avseende på O måste vara noll.

LP 3.24



Frilägg cirkelskivan enligt figuren!

Jämvikt fordrar:

$$\rightarrow: \quad H - \frac{1}{2}P = 0 \qquad (1)$$

$$\uparrow: \quad V + \frac{\sqrt{3}}{2}P = 0 \qquad (2)$$

$$\circlearrowleft O: \quad r \cdot \frac{P}{2} + r \cdot V + r \cdot H - M = 0 \qquad (3)$$

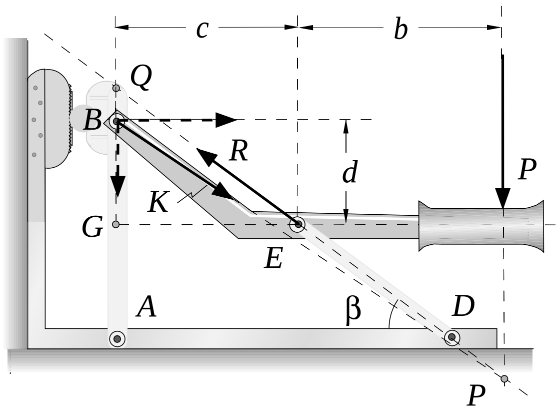
Uttryck H och H i H med hjälp av (1) och (2). Sätt in i ekv (3):

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right)Pr - M = 0$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{P = \frac{2M}{\left(2-\sqrt{3}\right)r}}}$$

Insättning i ekv (1) och (2) ger $\underline{\underline{H = \frac{M}{\left(2-\sqrt{3}\right)r}}}$ och $\underline{\underline{V = -\frac{\sqrt{3}M}{\left(2-\sqrt{3}\right)r}}}$

LP 3.25



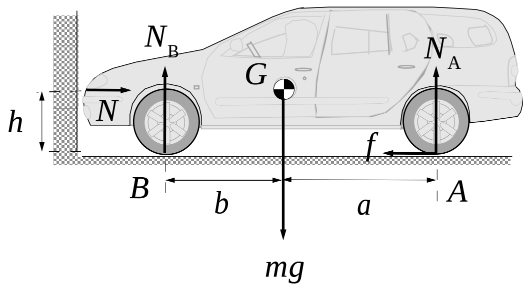
Frilägg armen enligt figuren och inför reaktionskrafterna K och R!

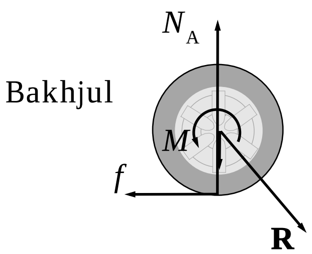
Länkarmen DE är en tvåkraftskropp och kraften R måste alltså ha en verkningslinje genom D och E. Hela den frilagda armen är en trekraftskropp. Verkningslinjen för kraften K måste alltså gå genom punkten P. Vi skall bestämma den horisontella delen av kraften K. Vi eliminerar därför den ointressanta kraften R genom att ställa upp momentekvationen med avseende på Q

Avståndet QG är $c\tan\beta$. Hävarmen till den horisontella kraftkomponenten av K, som vi kallar K_1 blir då $c\tan\beta - d$. Momentekvationen med avseende på Q blir

$$(c\tan\beta - d)K_1 - P(b+c) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \underline{\underline{K_1 = \frac{b+c}{c\tan\beta - d}P}}$$

LP 3.27





Frilägg bilen från vägg och underlag!

Bilens tyngd är mg. Vid kontaktytan mot väggen finns enligt text bara en horisontell normalkraft N.

Framhjulen antas rulla lätt så att det finns inte någon friktionskraft där mot marken. Om bilen drivs framåt måste alltså motsvarande framåtriktade kraft vara friktionskraften vid bakhjulens kontakt med marken.

Om bakhjulsparet friläggs ser man att det förutom kontaktkraften påverkas av en kraft **R** från resten av bilen, en tyngdkraft och ett kraftparsmoment M.

Jämvikt för hjulparet fordrar:

$$\curvearrowleft O: \quad M - f \cdot r = 0$$

Detta förklarar sambandet mellan det drivande momentet och friktionskraften men behövs inte för att lösa detta problem.

Jämvikt för den frilagda bilen fordrar:

$$\rightarrow: \quad N - f = 0 \qquad (1)$$
$$\uparrow: \quad N_A + N_B - mg = 0 \qquad (2)$$
$$\curvearrowleft A: \quad mg \cdot a - N_B \cdot (a+b) - N \cdot h = 0 \qquad (3)$$

Normalkraften N är känd. Det betyder att N_B ges av ekv (3):

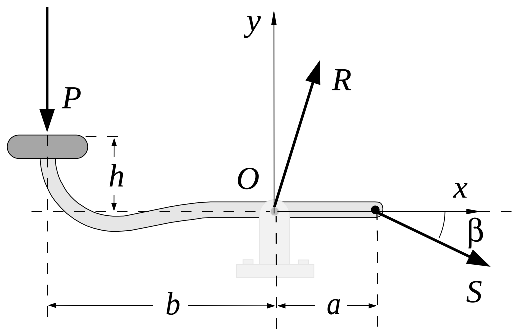
$$\underline{\underline{N_B = \frac{mga - Nh}{a+b}}}$$

och då ges N_A av ekv (2) $\quad N_A = mg - N_B \quad \Rightarrow$

$$N_A = mg - \frac{mga - Nh}{a+b} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{N_A = \frac{mgb + Nh}{a+b}}}$$

Kommentar:
Om normalkraften $N = 0$ ligger en större del av bilens tyngd på framhjulen om $a < b$. Om $a = b$ är i detta fall normalkrafterna lika stora.
Normalkraften N ökar normalkraften vid bakhjulen och minskar den vid framhjulen. Vid ett visst kraftparsmoment på bakhjulen, dvs ett visst värde på normalkraften N, lättar framhjulen.

LP 3.33



Frilägg kroppen från leden i O. Inför reaktionskraften R. Vi förutsätter att leden O är glatt.

Jämvikt fordrar:

$$\rightarrow: \quad R_x + S\cos\beta = 0 \qquad (1)$$

$$\uparrow: \quad -P + R_y - S\sin\beta = 0 \qquad (2)$$

$$\curvearrowleft O: \quad P\cdot b - S\sin\beta\cdot a = 0 \qquad (3)$$

Ekv (3) ger $\underline{\underline{S = \dfrac{b}{a\sin\beta}P}}$ (4)

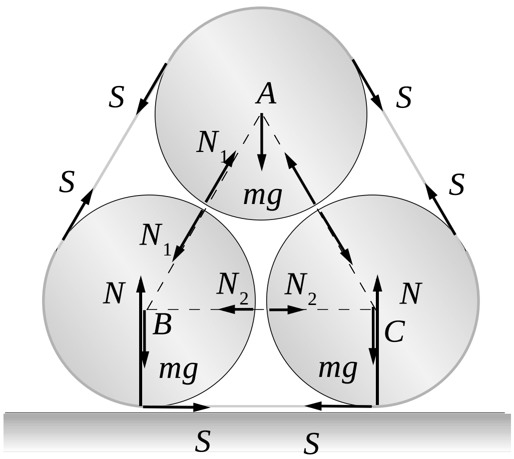
Ekv (1) och (2) ger $\quad R_x = -S\cos\beta \qquad R_y = P + S\sin\beta$

Sätt in detta i (4)! $\Rightarrow \quad R_x = -\dfrac{b}{a\tan\beta}P \qquad R_y = \dfrac{a+b}{a}P \quad \Rightarrow$

$$R = \sqrt{R_x^{\ 2} + R_y^{\ 2}} = P\sqrt{\frac{(a+b)^2}{a^2} + \frac{b^2}{a^2\tan^2\beta}}$$

$$\underline{\underline{R = \frac{P}{a}\sqrt{(a+b)^2 + \frac{b^2}{\tan^2\beta}}}}$$

LP 3.38



Frilägg cylindrarna från varandra och från bordet!

Vad händer om spännkraften S är för liten? Jo, de undre cylindrarna förlorar kontakten med varandra. Gränsfallet för detta är när normalkraften $N_2 = 0$.
Det är detta villkor som ger $S_{\min}$.

De spetsiga vinklarna i figuren är antingen 60° eller 30°.

Cylindrarna är glatta så att trådkraften är lika stor i alla delar av tråden. Det ges också om man ställer upp moment-ekvationen med avseende på varje centrum.

Jämvikt fordrar

för den övre cylindern:

$$\uparrow: \quad 2\frac{\sqrt{3}}{2}N_1 - mg - 2\frac{\sqrt{3}}{2}S = 0 \qquad (1)$$

för den undre vänstra cylindern:

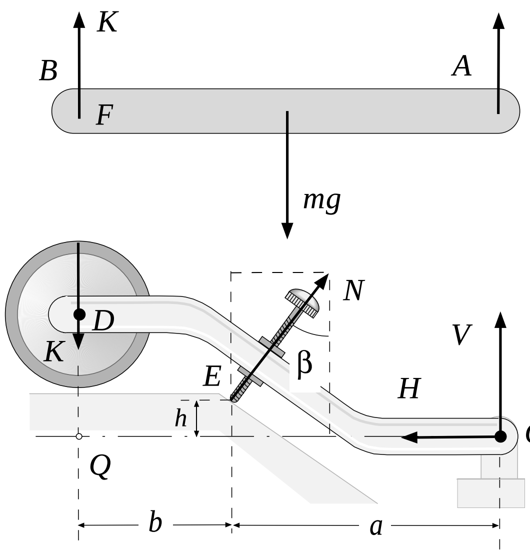
$$\rightarrow: \quad S + \frac{1}{2}S - N_2 - \frac{1}{2}N_1 = 0 \qquad (2)$$

Sätt nu in $N_2 = 0$ i ekv (2) och eliminera N_1 ur ekvationerna genom att först multiplicera (2) med 2, dividera (1) med $\sqrt{3}$ och sedan addera ekvationerna.

Resultatet är

$$\underline{\underline{S_{\min} = \frac{mg}{2\sqrt{3}}}}$$

LP 3.42



Frilägg stången AB och frilägg den undre delen av systemet från kontakten vid E och C. Stången är homogen så att masscentrum ligger mitt på stången.

Alla leder är glatta. Det betyder att det saknas bromsande kraftparsmoment vid dessa axlar. För hjulet betyder det att den horisontella kraften vid kontaktpunkten F är noll. Annars skulle det vara den enda kraften som skulle ge ett kraftmoment med avseende på hjulaxeln D och hjulet skulle inte vara i jämvikt.

Antag att den horisontella och vertikala komponenten av kontaktkraften vid C är H respektive V.

Jämvikt för den frilagda stången AB fordrar:

$$\curvearrowleft A: \quad mg \cdot \frac{1}{2}(a+b) - K \cdot (a+b) = 0 \qquad (1)$$

Jämvikt för den frilagda undre delen av systemet fordrar:

$$\rightarrow: \quad -H + N\sin\beta = 0 \qquad (2)$$

$$\uparrow: \quad V + N\cos\beta - K = 0 \qquad (3)$$

$$\curvearrowleft C: \quad -N\cos\beta \cdot a - N\sin\beta \cdot h + K \cdot (a+b) = 0 \qquad (4)$$

Kraften AB bestäms direkt med ekv (1):

$$K = \frac{mg}{2} \qquad (5)$$

Kraften N bestäms då av ekv (4):

$$N = \frac{mg(a+b)}{2(a\cos\beta + h\sin\beta)} \qquad (6)$$

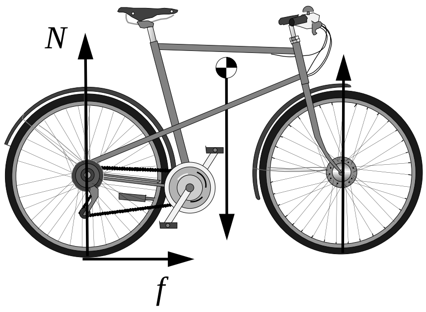
Insättning av (5) och (6) i ekv (2) och (3) ger då H och V:

$$\underline{\underline{H = \frac{(a+b)\sin\beta}{2(a\cos\beta + h\sin\beta)}mg}}$$

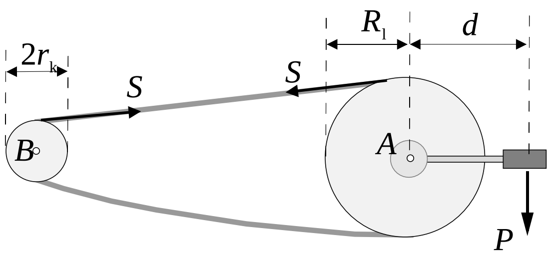
$$V = \frac{mg}{2}\left(1 - \frac{(a+b)\cos\beta}{a\cos\beta + h\sin\beta}\right) \quad \text{eller} \quad \underline{\underline{V = \frac{h\sin\beta - b\cos\beta}{2(a\cos\beta + h\sin\beta)}mg}}$$

Om $h\tan\beta = b$ (se figur!) är den vertikala kraften $V = 0$. Det motsvaras av att K, N och H bildar ett strålkraftsystem med skärningspunkt i Q.

LP 3.52



En stel kropp som har konstant translationshastighet, dvs alla punkter i kroppen har lika hastighet, befinner sig i ett jämviktstillstånd. En stel kropp som roterar med konstant vinkelhastighet kring en axel genom masscentrum är också i jämvikt.
Detta gäller även om axeln genom masscentrum har konstant hastighet.
Full förståelse för detta får man i dynamiken.



Om bakhjulet friläggs ser man att det påverkas av krafter i centrum, kontaktkraften mot marken samt kraften S på kedjekransen, som ju är stelt förenad med hjulet.

Kedjehjulet med pedaler påverkas förutom av krafter i centrum av kraften S och kraften P på pedalen.

Enda möjligheten att slippa krafterna vid axlarna är att ställa upp momentekvationerna med avseende på dessa axlar.

Jämvikt fordrar:

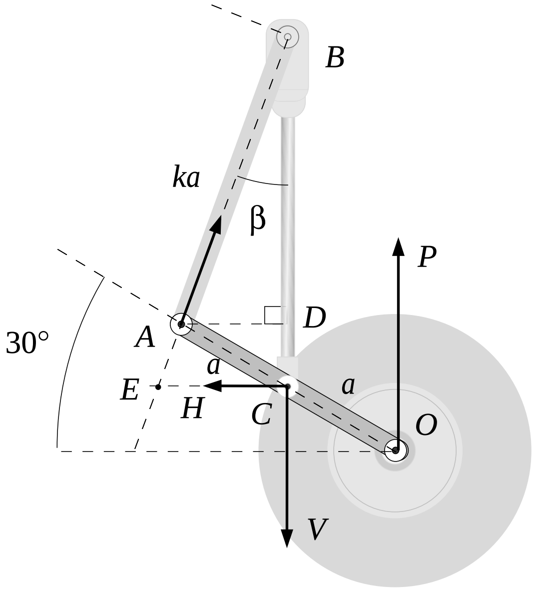
Bakhjul	$\curvearrowleft B$:	$f \cdot R - r_k \cdot S = 0$	(1)
Kedjehjul	$\curvearrowleft A$:	$S \cdot R_l - d \cdot P = 0$	(2)

Ekv (2) ger $$\underline{\underline{S = \frac{Pd}{R_l}}}$$

Ekv (1) ger då $$f = \frac{r_k}{R} S \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{f = \frac{r_k \cdot d}{R \cdot R_l} P}}$$

Eftersom d och R är givna konstanta avstånd kan cykelns framåtdrivande kraft f ändras bara genom utväxlingen, dvs förhållandet $r_k \,/\, R_l$, som kan bestämmas genom att räkna antalet kuggar på de båda hjulen.

LP 3.56



Hjulet påverkas vid kontaktstället mot marken av kraften P uppåt. Jämvikt i vertikal led innebär då att kraften på hjulet vid O är P nedåt. Då har man också försummat hjulets tyngd jämfört med flygplanets.

Frilägg nu stången OA! Eftersom stången AB är lätt, är det en tvåkraftskropp och då måste kraften i leden A vara riktad mot punkten B.
Antag att reaktionskraften i C har komponenterna H och V enligt figuren. Kraftsituationen är då klar eftersom lederna är glatta och tyngden får försummas.

Nu återstår att ur den givna geometrin bestämma hävarmar.

Observera att vinkeln β inte är $30°$, eftersom stängerna OA och AB inte är vinkelräta.

$$|\mathbf{r}_{AC}| = a \quad \Rightarrow \quad |\mathbf{r}_{CD}| = a\sin 30° \quad \Rightarrow \quad |\mathbf{r}_{CD}| = \frac{a}{2} \qquad (1)$$

$$\Rightarrow \quad |\mathbf{r}_{AD}| = a\cos 30° \quad \Rightarrow \quad |\mathbf{r}_{AD}| = \frac{a\sqrt{3}}{2} \qquad (2)$$

Med Pythagoras sats för triangeln ABD fås:

$$|\mathbf{r}_{AB}| = a\sqrt{7} \quad \Rightarrow \quad |\mathbf{r}_{BD}| = a\sqrt{7-\frac{3}{4}} = \frac{5a}{2} \quad \Rightarrow \quad |\mathbf{r}_{BC}| = 3a \qquad (3)$$

Likformighet ger

$$(\tan\beta =)\ \frac{|\mathbf{r}_{AD}|}{|\mathbf{r}_{BD}|} = \frac{|\mathbf{r}_{EC}|}{|\mathbf{r}_{BC}|} \quad \Rightarrow \quad \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{5a}{2}} = \frac{|\mathbf{r}_{EC}|}{3a} \quad \Rightarrow \quad |\mathbf{r}_{EC}| = \frac{3\sqrt{3}}{5}a \qquad (4)$$

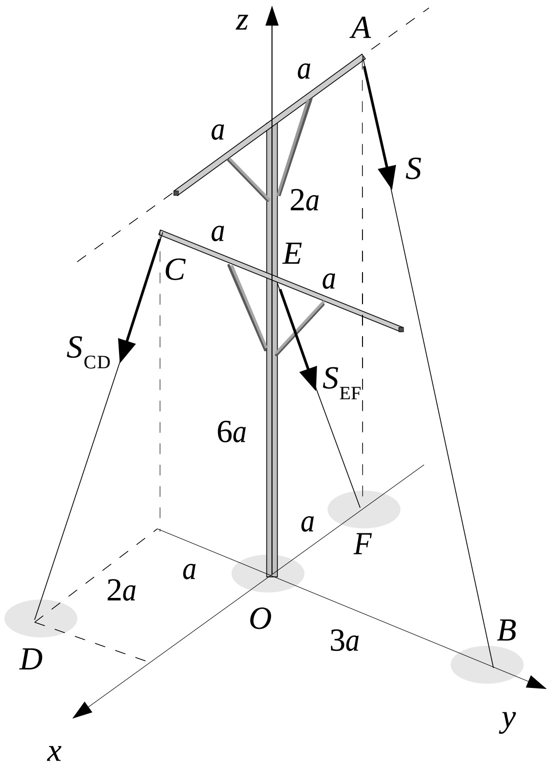
Jämvikt för stången OA fordrar:

$$\curvearrowleft B: \quad P\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2} - H\cdot\left(\frac{a}{2}+\frac{5a}{2}\right) = 0 \qquad (5)$$

$$\curvearrowleft E: \quad P\cdot\left(\frac{3a\sqrt{3}}{5}+\frac{a\sqrt{3}}{2}\right) - V\cdot\frac{3a\sqrt{3}}{5} = 0 \qquad (6)$$

Ekv (5) och (6) ger $\qquad \underline{\underline{H = \frac{\sqrt{3}}{6}P}} \qquad \underline{\underline{V = \frac{11}{6}P}}$

LP 3.61



Jämvikt för stolpen fordrar att kraftmomentet $\mathbf{M}_O = \mathbf{0}$. Stolpen kan inte vrida sig kring z-axeln, eftersom fundamentet kan balansera ett eventuellt kraftmoment i z-riktningen.

De tre trådkrafternas moment med avseende på x- och y- riktningen måste däremot vara noll.

För att kunna beräkna kraftmomenten måste man skriva trådkrafterna på vektorform. Vi börjar därför med att bestämma enhetsvektorerna i trådriktningarna.

Här är

$$\mathbf{r}_{AB} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A \quad (1)$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{r}_{AB} = (0,\,3a,\,0) - (-a,\,0,\,8a) \quad (2)$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{r}_{AB} = (a,\,3a,\,-8a) \quad (3)$$

$$\mathbf{e}_{AB} = \frac{\mathbf{r}_{AB}}{|\mathbf{r}_{AB}|} = \frac{(1,\,3,\,-8)}{|(1,\,3,\,-8)|} = \frac{(1,\,3,\,-8)}{\sqrt{1^2+3^2+(-8)^2}} = \frac{1}{\sqrt{74}}(1,\,3,\,-8) \quad (4)$$

På samma sätt fås

$$\mathbf{r}_{CD} = (2a,\,0,\,-6a) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{e}_{CD} = \frac{(1,\,0,\,-3)}{|(1,\,0,\,-3)|} = \frac{(1,\,0,\,-3)}{\sqrt{1+0+9}} = \frac{1}{\sqrt{10}}(1,\,0,\,-3) \quad (5)$$

$$\mathbf{r}_{EF} = (-a,\,0,\,-6a) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{e}_{EF} = \frac{(-1,\,0,\,-6)}{|(-1,\,0,\,-6)|} = \frac{(-1,\,0,\,-6)}{\sqrt{1+0+36}} = \frac{1}{\sqrt{37}}(-1,\,0,\,-6) \quad (6)$$

Krafterna på vektorform är alltså

$$\mathbf{S}_{AB} = S\mathbf{e}_{AB} = \frac{S}{\sqrt{74}}(1,\,3,\,-8) \quad (7)$$

$$\mathbf{S}_{CD} = S_{CD}\mathbf{e}_{CD} = \frac{S_{CD}}{\sqrt{10}}(1,\,0,\,-3) \quad (8)$$

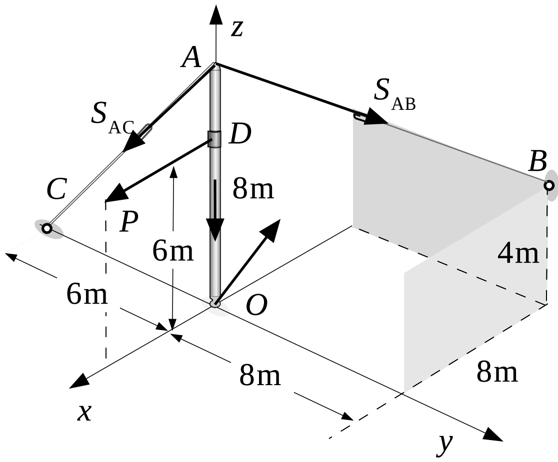
$$\mathbf{S}_{EF} = S_{EF}\mathbf{e}_{EF} = \frac{S_{EF}}{\sqrt{37}}(-1,\,0,\,-6) \quad (9)$$

$$\mathbf{M}_O = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ -1 & 0 & 8 \\ 1 & 3 & -8 \end{vmatrix} \frac{aS}{\sqrt{74}} + \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 0 & -1 & 6 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} \frac{aS_{CD}}{\sqrt{10}} + \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 0 & 0 & 6 \\ -1 & 0 & -6 \end{vmatrix} \frac{aS_{EF}}{\sqrt{37}} + \text{kraftmoment från fundament}$$

$$(M_x =) \quad -\frac{24aS}{\sqrt{74}} + \frac{3aS_{CD}}{\sqrt{10}} + 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad S_{CD} = \frac{8\sqrt{5}}{\sqrt{37}}S$$

$$(M_y =) \quad 0 + \frac{6aS_{CD}}{\sqrt{10}} - \frac{6aS_{EF}}{\sqrt{37}} = 0 \quad \Rightarrow \quad S_{EF} = \frac{8}{\sqrt{2}}S$$

LP 3.65



De yttre krafterna på stolpen är förutom P tyngdkraften mg, trådkrafterna S_{AB} och S_{AC} samt reaktionskraften vid O. Trådkrafterna skall bestämmas. Det motsvarar två obekanta eftersom kraftriktningarna är givna.

Reaktionskraften vid O motsvarar tre obekanta. Enda möjligheten att slippa den kraften i räkningarna är att ställa upp momentekvationen med avseende på O.

Först skriver vi trådkrafterna som vektorer. Vi börjar med att bestämma enhetsvektorerna i deras riktningar.

$$\mathbf{r}_{AB} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A \quad \Rightarrow \quad \mathbf{r}_{AB} = (-8,\,8,\,-4)\text{ m} \quad \Rightarrow \tag{1}$$

$$\mathbf{e}_{AB} = \frac{\mathbf{r}_{AB}}{|\mathbf{r}_{AB}|} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{e}_{AB} = \frac{(-2,\,2,\,-1)}{|(-2,\,2,\,-1)|} = \frac{(-2,\,2,\,-1)}{\sqrt{4+4+1}} = \frac{1}{3}(-2,\,2,\,-1) \tag{2}$$

$$\mathbf{r}_{AC} = \mathbf{r}_C - \mathbf{r}_A \quad \Rightarrow \quad \mathbf{r}_{AB} = (\,0,\,-6,\,-8)\text{ m} \quad \Rightarrow \tag{3}$$

$$\mathbf{e}_{AC} = \frac{\mathbf{r}_{AC}}{|\mathbf{r}_{AC}|} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{e}_{AC} = \frac{(\,0,\,-3,\,-4)}{|(\,0,\,-3,\,-4)|} = \frac{(\,0,\,-3,\,-4)}{\sqrt{9+16}} = \frac{1}{5}(\,0,\,-3,\,-4) \tag{4}$$

Trådkrafterna skrivna som vektorer är alltså

$$\mathbf{S}_{AB} = S_{AB}\mathbf{e}_{AB} = \frac{S_{AB}}{3}(-2,\,2,\,-1) \qquad \mathbf{S}_{AC} = S_{AC}\mathbf{e}_{AC} = \frac{S_{AC}}{5}(\,0,\,-3,\,-4) \tag{5}$$

Jämvikt fordrar: $\quad \mathbf{M}_O = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{r}_A \times \mathbf{S}_{AB} + \mathbf{r}_A \times \mathbf{S}_{AC} + \mathbf{r}_D \times \mathbf{P} = \mathbf{0}$ (6)

$$(\mathbf{M}_O =)\ \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 0 & 0 & 8 \\ -2 & 2 & -1 \end{vmatrix} \frac{S_{AB}}{3}\text{ m} + \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & -3 & -4 \end{vmatrix} \frac{S_{AC}}{5}\text{ m} + \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 0 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} P\text{ m} = \mathbf{0} \tag{7}$$

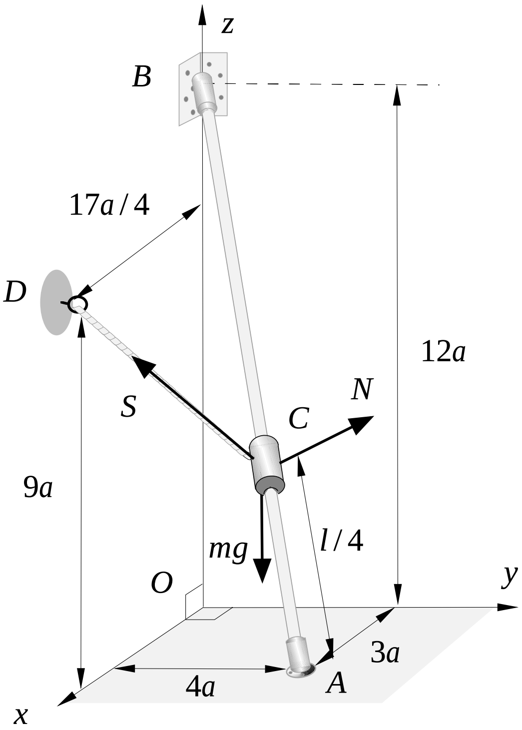
Enheten kan tyckas vara fel men krafterna innehåller enheten N.

$$(M_x =)\quad -\frac{16S_{AB}}{3} + \frac{24S_{AC}}{5} = 0 \quad \Rightarrow \quad S_{AB} = \frac{9S_{AC}}{10}$$

$$(M_y =)\quad -\frac{16S_{AC}}{3} + 6P = 0 \quad \Rightarrow \quad S_{AC} = \frac{9}{8}P \quad \Rightarrow \quad S_{AB} = \frac{81}{80}P$$

Kraften P är given: $P = 8$ kN $\quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{S_{AB} = \frac{27}{20}\text{ kN}}}\,; \qquad \underline{\underline{S_{AC} = 9\text{ kN}}}$

LP 3.67



De yttre krafterna på hylsan, som får antas vara liten, är tyngdkraften mg, trådkraften S samt normalkraften N. Tyngdkraften och trådkraften har givna riktningar. Normalkraftens riktning är delvis känd. Den är ju vinkelrät mot stången. Trådkraften skall bestämmas. Eftersom hylsan antas vara liten har krafterna samma angreppspunkt och momentekvationen är då redan satisfierad.

Går det att skriva upp en jämviktsekvation utan att normalkraften kommer med? Ja, kraftekvationen projicerad på stångens riktning skulle kunna ge resultatet. Vi måste då först bestämma enhetsvektorn i stångens riktning samt krafterna som vektorer.

$$\mathbf{r}_{AB} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A \quad \Rightarrow \quad \mathbf{r}_{AB} = (0,\, 0,\, 12a) - (3a,\, 4a,\, 0) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{r}_{AB} = (-3a,\, -4a,\, 12a) \tag{1}$$

$$\mathbf{e}_{AB} = \frac{\mathbf{r}_{AB}}{|\mathbf{r}_{AB}|} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{e}_{AB} = \frac{(-3a,\, -4a,\, 12a)}{|(-3a,\, -4a,\, 12a)|} \quad \Rightarrow \tag{2}$$

$$\mathbf{e}_{AB} = \frac{(-3,\, -4,\, 12)}{|(-3,\, -4,\, 12)|} = \frac{(-3,\, -4,\, 12)}{\sqrt{(-3)^2 + (-4)^2 + 12^2}} = \frac{1}{13}(-3,\, -4,\, 12) \tag{3}$$

Trådkraftens riktning fås på samma sätt. Vi bestämmer först enhetsvektorn $\mathbf{e}_{CD}$.

$$\mathbf{r}_{CD} = \mathbf{r}_D - \mathbf{r}_C \quad \Rightarrow \quad \mathbf{r}_{CD} = \left(\frac{17a}{4},\, 0,\, 9a\right) - \left(\frac{9a}{4},\, 3a,\, 3a\right) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{r}_{CD} = (2a,\, -3a,\, 6a) \tag{4}$$

$$\mathbf{e}_{CD} = \frac{\mathbf{r}_{CD}}{|\mathbf{r}_{CD}|} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{e}_{CD} = \frac{(2a,\, -3a,\, 6a)}{|(2a,\, -3a,\, 6a)|} \quad \Rightarrow \tag{5}$$

$$\mathbf{e}_{CD} = \frac{(2,\, -3,\, 6)}{|(2,\, -3,\, 6)|} = \frac{(2,\, -3,\, 6)}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 6^2}} = \frac{1}{7}(2,\, -3,\, 6) \quad \Rightarrow \tag{6}$$

$$\mathbf{S} = S\mathbf{e}_{CD} = \frac{S}{7}(2,\, -3,\, 6) \tag{7}$$

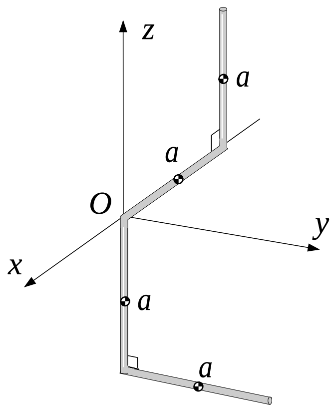
Jämvikt fordrar: $\quad \mathbf{S} \cdot \mathbf{e}_{AB} + (-mg\mathbf{e}_z) \cdot \mathbf{e}_{AB} = \mathbf{0}$

$$\frac{S}{7}(2,\, -3,\, 6) \cdot \frac{1}{13}(-3,\, -4,\, 12) + (0,\, 0,\, -mg) \cdot \frac{1}{13}(-3,\, -4,\, 12) = 0$$

$$\frac{S}{13 \cdot 7}(-6 + 12 + 72) - \frac{12}{13}mg = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{S = \frac{42}{39}mg}}$$

Statik Problemsamling 4

LP 4.1



Låt kroppens totala massa vara $4m$, så att varje rak stång har massan m och längden a.

Masscentrum för en rak homogen stång ligger självklart i mitten.

Masscentrums x-koordinat för den sammansatta kroppen är allmänt

$$x_G = \frac{m_1 x_{g1} + m_2 x_{g2} + m_3 x_{g3} + m_4 x_{g4}}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}$$

Insättning ger: (numrera stängerna uppifrån och ned)

$$x_G = \frac{m(-a) + m(-a/2) + m \cdot 0 + m \cdot 0}{4m} = -\frac{3}{8}a$$

Motsvarande för y- och z-koordinaterna blir

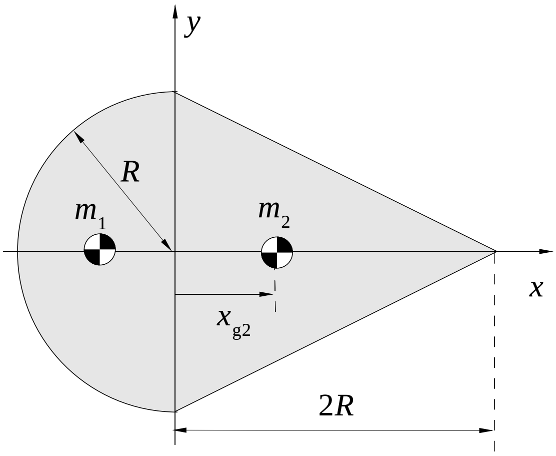
$$y_G = \frac{m \cdot 0 + m \cdot 0 + m \cdot 0 + m(a/2)}{4m} = \frac{1}{8}a$$

$$x_G = \frac{m(a/2) + m \cdot 0 + m(-a/2) + m(-a)}{4m} = -\frac{1}{4}a$$

Lägevektorn från origo till masscentrum G är alltså

$$\mathbf{r}_G = (x_G,\ y_G,\ z_G) = \underline{\underline{\left(-\frac{3}{8},\ \frac{1}{8},\ -\frac{1}{4}\right)a}}$$

LP 4.2



Systemets masscentrum G måste på grund av symmetri ligga på x-axeln.

$$\Rightarrow \qquad z_G = 0,\ y_G = 0$$

Vi betecknar kropparna, halvcirkelskivan och triangeln, med index 1 och 2.

Massorna bestäms som areadensiteten gånger arean.

$$m_1 = \rho \frac{1}{2}\pi R^2, \quad m_2 = \rho \frac{1}{2} 2R \cdot 2R$$

Masscentrum för en halvcirkelskiva och triangel har bestämts i teoriboken. Vi utnyttjar resultaten här

$$x_{g1} = -\frac{4R}{3\pi}, \quad x_{g2} = \frac{2R}{3},$$

Masscentrums x-koordinat för den sammansatta kroppen är allmänt

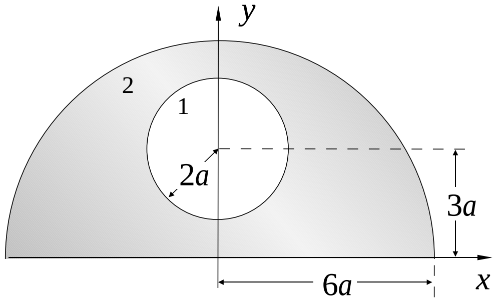
$$x_G = \frac{m_1 x_{g1} + m_2 x_{g2}}{m_1 + m_2}$$

Insättning ger

$$x_G = \frac{\rho \frac{1}{2}\pi R^2 \cdot \left(-\frac{4R}{3\pi}\right) + \rho \frac{1}{2} 2R \cdot 2R \cdot \frac{2R}{3}}{\rho \frac{1}{2}\pi R^2 + \rho \frac{1}{2} 2R \cdot 2R} = \frac{-\frac{4R}{3} + \frac{8R}{3}}{\pi + 4} = \underline{\underline{\frac{4R}{3(\pi + 4)}}}$$

Man bör med ett närmevärde $x_G \approx 0.2R$ kolla att denna x-koordinat är rimlig.

LP 4.3



Kroppens masscentrum måste på grund av symmetri ligga på y-axeln. Både x- och y-koordinaten för den sökta kroppens masscentrum är noll.

Vi betecknar kropparna, den bortagna cirkelskivan och den resterande kroppen, med index 1 respektive 2. Deras massor betecknas m_1 och m_2.
Den ursprungliga halvcirkelskivan har då massan $m = m_1 + m_2$.

Det är masscentrum för kropp 2 som skall bestämmas.

Massorna bestäms som areadensiteten gånger arean.

$$m_1 = \rho\pi(2a)^2 = 4\rho\pi a^2, \qquad m = \rho\frac{1}{2}\pi(6a)^2 = 18\rho\pi a^2 \qquad \Rightarrow$$

$$m_2 = m - m_1 = \rho\frac{1}{2}\pi(6a)^2 - \rho\pi(2a)^2 = 14\rho\pi a^2$$

Masscentrum för en halvcirkelskiva har bestämts i teoriboken. Vi utnyttjar resultatet här

$$y_{g1} = 3a, \qquad y_G = \frac{4\cdot 6a}{3\pi} = \frac{8a}{\pi}, \qquad y_{g2} = ?$$

Masscentrums y-koordinat för hela halvcirkelskivan är allmänt

$$y_G = \frac{m_1 y_{g1} + m_2 y_{g2}}{m_1 + m_2}$$

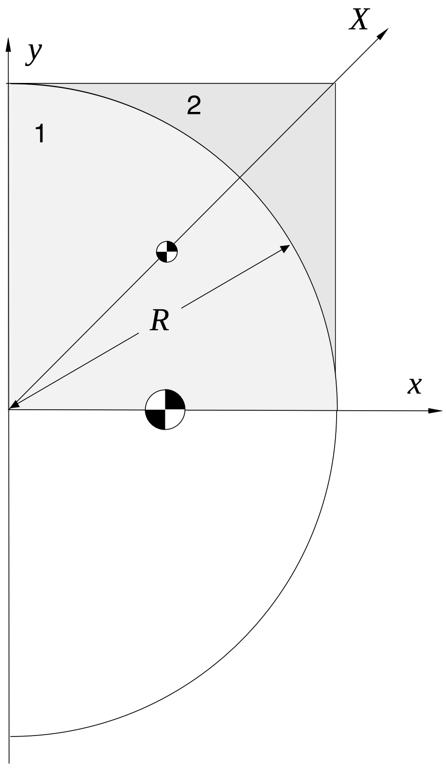
Insättning ger

$$\frac{8a}{\pi} = \frac{4\rho\pi a^2\cdot 3a + 14\rho\pi a^2\cdot y_{g2}}{18\rho\pi a^2} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{8a}{\pi} = \frac{6a + 7y_{g2}}{9} \qquad \Rightarrow$$

$$\underline{\underline{y_{g2} = \frac{6}{7}\left(\frac{12}{\pi} - 1\right)a}} \qquad\qquad y_{g2} \approx 2.4\,a$$

Från början, för hela halvcirkelskivan är $y_G \approx 2.7\,a$. När cirkelskivan vid $y = 3a$ tas bort måste masscentrums läge sänkas.

LP 4.4



Kroppens masscentrum måste på grund av symmetri ligga på X-axeln. Det betyder att x- och y-koordinaten för den sökta kroppens masscentrum är lika. Vi bestämmer därför bara x-koordinaten.

Vi betecknar kropparna, den bortagna kvartcirkelskivan och den resterande kroppen, med index 1 respektive 2. Deras massor betecknas m_1 och m_2. Den ursprungliga kvadratiska skivan har då massan $m = m_1 + m_2$.

Masscentrums x-koordinat för kvartcirkelskivan måste vara densamma som för halvcirkelskivan. Det är dessa masscentra som markerats i figuren. Det är masscentrum för kropp 2 som skall bestämmas.

Massorna bestäms som areadensiteten gånger arean:

$$m_1 = \rho \frac{1}{4} \pi R^2, \qquad m = \rho R^2 \qquad \Rightarrow$$

$$m_2 = m - m_1 = \rho R^2 - \rho \frac{1}{4} \pi R^2 = \rho \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) R^2$$

Masscentrum för en halvcirkelskiva har bestämts i teoriboken och finns i en tabell i problemsamlingen. Vi utnyttjar resultatet här

$$x_{g1} = \frac{4R}{3\pi}, \qquad x_G = \frac{R}{2}, \qquad x_{g2} = ?$$

Masscentrums x-koordinat för hela den kvadratiska skivan är allmänt

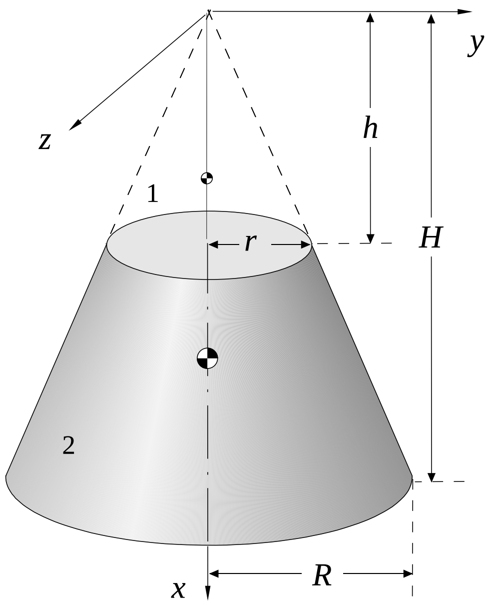
$$x_G = \frac{m_1 x_{g1} + m_2 x_{g2}}{m_1 + m_2} \qquad \Rightarrow \qquad x_{g2} = \frac{m x_G - m_1 x_{g1}}{m_2}$$

Insättning ger
$$x_{g2} = \frac{\rho R^2 \cdot \frac{R}{2} - \rho \frac{1}{4} \pi R^2 \cdot \frac{4R}{3\pi}}{\rho \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) R^2} \qquad \Rightarrow$$

$$x_{g2} = y_{g2} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}{\frac{4-\pi}{4}} R = \frac{6-4}{3(4-\pi)} R = \underline{\underline{\frac{2}{3(4-\pi)}}} R \approx 0.8 R$$

Det numeriska värdet visar att masscentrums koordinater är rimliga.

LP 4.5



Kroppens masscentrum måste på grund av symmetri ligga på x-axeln. Det betyder att y- och z-koordinaterna för den sökta kroppens masscentrum är noll. Vi bestämmer därför bara x-koordinaten.

Vi betecknar kropparna, den bortagna konen och den resterande kroppen, med index 1 respektive 2. Deras massor betecknas m_1 och m_2. Den ursprungliga konen har då massan $m = m_1 + m_2$.

Masscentrum för en kon med höjden h ligger på avståndet $3h/4$ från spetsen. Detta är egentligen en del av problemet, men har bestämts i teoriboken och finns i tabell i problemsamlingen. Det är masscentrums läge för kropp 2 som skall bestämmas.

Toppkonens radie fås med likformighet: $r = \dfrac{h}{H} R$

Massorna bestäms som densiteten gånger arean:

$$m_1 = \rho\pi r^2 h, \qquad m = \rho\pi R^2 H \quad \Rightarrow$$

$$m_2 = m - m_1 = \rho\pi R^2 H - \rho\pi r^2 h = \rho\pi R^2 \left(H - \frac{h^2}{H^2} h \right) = \rho\pi R^2 \frac{H^3 - h^3}{H^2}$$

Masscentrum för en kon har bestämts i teoriboken och finns i en tabell i problemsamlingen. Vi utnyttjar resultatet här

$$x_{g1} = \frac{3h}{4}, \qquad x_G = \frac{3H}{4}, \qquad x_{g2} = ?$$

Masscentrums x-koordinat för hela konen är allmänt

$$x_G = \frac{m_1 x_{g1} + m_2 x_{g2}}{m_1 + m_2} \quad \Rightarrow \quad x_{g2} = \frac{m x_G - m_1 x_{g1}}{m_2}$$

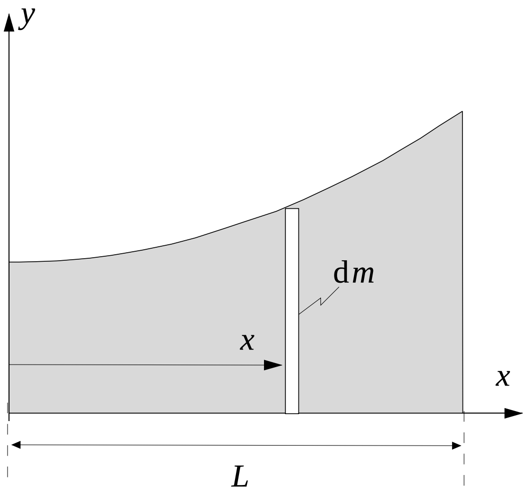
Insättning ger

$$x_{g2} = \frac{\rho\pi R^2 H \cdot \frac{3H}{4} - \rho\pi r^2 h \cdot \frac{3h}{4}}{\rho\pi R^2 \frac{H^3 - h^3}{H^2}} \quad \Rightarrow$$

$$x_{g2} = 3H^2 \frac{R^2 H^2 - r^2 h^2}{4R^2 \left(H^3 - h^3 \right)} \quad \Rightarrow \quad x_{g2} = \frac{3\left(H^4 - h^4 \right)}{4\left(H^3 - h^3 \right)}$$

Kontroll: $h \to 0 \quad \Rightarrow \quad x_{g2} \to \dfrac{3H}{4}$

LP 4.6



Väggen kan sägas bestå av många smala, höga rektanglar. En av dessa rektanglar ligger på avståndet x ifrån y-axeln. Den har bredden $\mathrm{d}x$ och höjden $y = a + bx^2$. Dess masscentrum har läget

$$x_g = x$$

$$y_g = \frac{1}{2} y = \frac{1}{2}\left(a + bx^2\right)$$

Denna rektangel väljs här som masselement.

Masselementet är

$$\mathrm{d}m = \rho\left(a + bx^2\right)\mathrm{d}x$$

Hela kroppens masscentrum fås då enligt formeln för en sammansatt kropps masscentrum:

$$x_G = \frac{\int x_g \,\mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m}; \qquad y_G = \frac{\int y_g \,\mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m}$$

Insättning ger

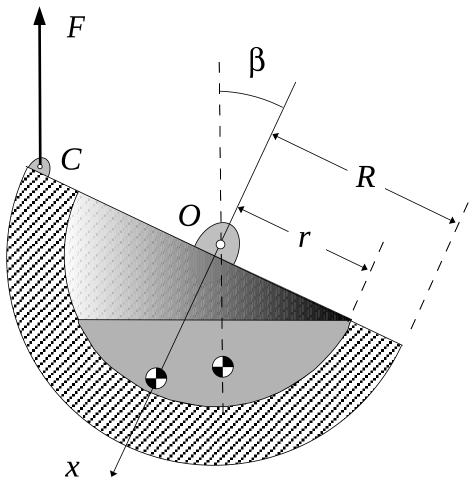
$$x_G = \frac{\int x\rho\left(a + bx^2\right)\mathrm{d}x}{\int \rho\left(a + bx^2\right)\mathrm{d}x} = \frac{\int \left(ax + bx^3\right)\mathrm{d}x}{\int \left(a + bx^2\right)\mathrm{d}x}$$

$$x_G = \frac{\int_0^L \left(ax + bx^3\right)\mathrm{d}x}{\int_0^L \left(a + bx^2\right)\mathrm{d}x} = \frac{\left[\frac{1}{2}ax^2 + \frac{1}{4}bx^4\right]_0^L}{\left[ax + \frac{1}{3}bx^3\right]_0^L} = \frac{\frac{1}{2}aL^2 + \frac{1}{4}bL^4}{aL + \frac{1}{3}bL^3} = \underline{\underline{\frac{6a + 3bL^2}{12a + 4bL^2}L}}$$

$$y_G = \frac{\int_0^L \frac{1}{2}\left(a + bx^2\right)\rho\left(a + bx^2\right)\mathrm{d}x}{\int_0^L \rho\left(a + bx^2\right)\mathrm{d}x} = \frac{\int_0^L \frac{1}{2}\left(a^2 + 2abx^2 + b^2x^4\right)\mathrm{d}x}{\int_0^L \rho\left(a + bx^2\right)\mathrm{d}x}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\left[a^2x + \frac{2}{3}abx^3 + \frac{1}{5}b^2x^5\right]_0^L}{\left[ax + \frac{1}{3}bx^3\right]_0^L} = \frac{1}{2}\cdot\frac{a^2L + \frac{2}{3}abL^3 + \frac{1}{5}b^2L^5}{aL + \frac{1}{3}bL^3} = \underline{\underline{\frac{15a^2 + 10abL^2 + 3b^2L^4}{30a + 10bL^2}}}$$

LP 4.7



Det här är ett jämviktsproblem där man måste bestämma läget för kroppens masscentrum. För att se vilken hävarm till kroppens tyngdkraft som blir aktuell ställer vi först upp jämviktsekvationen. Jämvikt fordrar att kraftmomentet med avseende på upphängningsaxeln AB är noll. Man ser att tyngden av smältan inte har någon hävarm med avseende på denna axel.
Låt behållarens massa vara m_2 och låt x_{g2} vara masscentrums avstånd från upphängningsaxeln AB. I figuren är masscentrum för smältan och behållaren markerade

$$\curvearrowleft O: \quad x_{g2} \cdot m_2 g \sin\beta - R\cos\beta \cdot F = 0 \qquad \Rightarrow \qquad F = \frac{m_2 g \sin\beta}{R\cos\beta} x_{g2}$$

Vi måste bestämma massan m_2 och masscentrums x-koordinat x_{g2}. Vi betecknar kropparna, det bortagna halvklotet och den resterande kroppen, med index 1 respektive 2. Deras massor betecknas m_1 och m_2. Det ursprungliga halvklotet har då massan $m = m_1 + m_2$. Det är masscentrums läge för kropp 2 som skall bestämmas. Massorna bestäms som densiteten gånger arean:

$$m_1 = \rho \frac{2}{3} \pi r^3, \qquad m = \rho \frac{2}{3} \pi R^3 \quad \Rightarrow$$

$$m_2 = m - m_1 = \rho \frac{2}{3} \pi R^3 - \rho \frac{2}{3} \pi r^3 = \rho \frac{2}{3} \pi \left(R^3 - r^3\right)$$

Masscentrum för ett halvklot har bestämts i teoriboken och finns i en tabell i problemsamlingen. Vi utnyttjar resultatet här

$$x_{g1} = \frac{3r}{8}, \qquad x_G = \frac{3R}{8}, \qquad x_{g2} = ?$$

Masscentrums x-koordinat för hela kroppen är allmänt

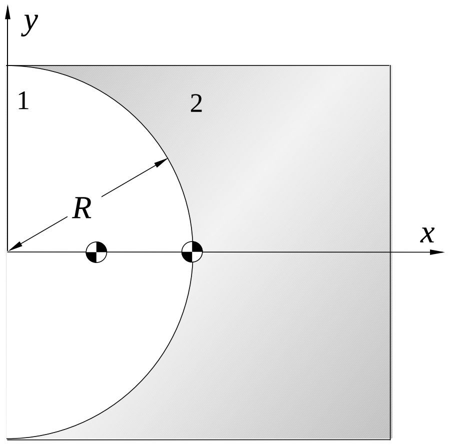
$$x_G = \frac{m_1 x_{g1} + m_2 x_{g2}}{m_1 + m_2} \qquad \Rightarrow \qquad x_{g2} = \frac{m x_G - m_1 x_{g1}}{m_2}$$

Insättning ger

$$x_{g2} = \frac{\rho \frac{2}{3} \pi R^3 \cdot \frac{3R}{8} - \rho \frac{2}{3} \pi r^3 \cdot \frac{3r}{8}}{\rho \frac{2}{3} \pi \left(R^3 - r^3\right)} \qquad \Rightarrow \qquad x_{g2} = \frac{\rho \frac{1}{4} \pi \left(R^4 - r^4\right)}{\rho \frac{2}{3} \pi \left(R^3 - r^3\right)} = \frac{3\left(R^4 - r^4\right)}{8\left(R^3 - r^3\right)}$$

$$F = \rho \frac{2}{3} \pi \left(R^3 - r^3\right) \cdot \frac{g \tan\beta}{R} \cdot \frac{3\left(R^4 - r^4\right)}{8\left(R^3 - r^3\right)} \qquad \Rightarrow \qquad \underline{\underline{F = \frac{\pi \rho g \tan\beta}{4R} \cdot \left(R^4 - r^4\right)}}$$

LP 4.8



Kroppens masscentrum måste på grund av symmetri ligga på x-axeln. Det betyder att y- och z-koordinaterna för den sökta kroppens masscentrum är noll. Vi bestämmer därför bara x-koordinaten.

Vi betecknar kropparna, den bortagna halvcirkelskivan och den resterande kroppen, med index 1 respektive 2. Deras massor betecknas m_1 och m_2. Den ursprungliga kvadratiska skivan har då massan $m = m_1 + m_2$.

Masscentrum för en kon med höjden h ligger på avståndet $3h/4$ från spetsen. Detta är egentligen en del av problemet, men har bestämts i teoriboken och finns i tabell i problemsamlingen. Det är masscentrums läge för kropp 2 som skall bestämmas.

Massorna bestäms som areadensiteten gånger arean:

$$m_1 = \rho \frac{1}{2} \pi R^2, \qquad m = \rho (2R)^2 = 4\rho R^2 \quad \Rightarrow$$

$$m_2 = m - m_1 = 4\rho R^2 - \rho \frac{1}{2} \pi R^2 = \rho R^2 \left(4 - \frac{\pi}{2}\right)$$

Masscentrum för en halvcirkelskiva har bestämts i teoriboken och finns i en tabell i problemsamlingen. Vi utnyttjar resultatet här

$$x_{g1} = \frac{4R}{3\pi}, \qquad x_G = R, \qquad x_{g2} = ?$$

Masscentrums x-koordinat för hela kroppen är allmänt

$$x_G = \frac{m_1 x_{g1} + m_2 x_{g2}}{m_1 + m_2} \quad \Rightarrow \quad x_{g2} = \frac{m x_G - m_1 x_{g1}}{m_2}$$

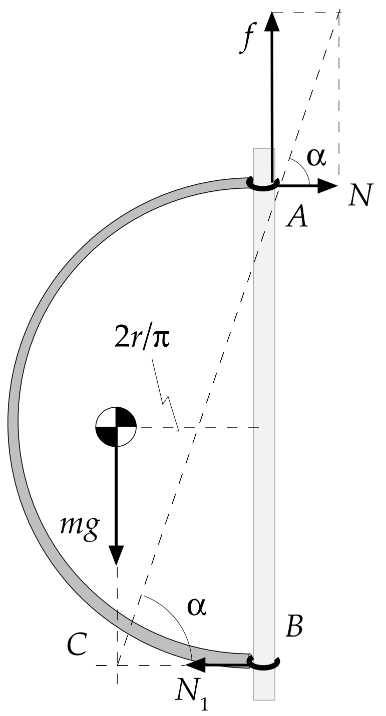
Insättning ger
$$x_{g2} = \frac{4\rho R^2 \cdot R - \rho \frac{1}{2} \pi R^2 \cdot \frac{4R}{3\pi}}{\rho R^2 \left(4 - \frac{\pi}{2}\right)} \quad \Rightarrow$$

$$x_{g2} = \frac{24 - 4}{24 - 3\pi} R = \underline{\underline{\frac{20}{24 - 3\pi}}} R \approx 1.3 R$$

Från början, för hela kvadraten, är x-koordinaten för masscentrum $x_G = R$. När halvcirkelskivan tas bort måste masscentrums läge förflyttas åt höger i figuren och vara mindre än $x = 1.5R$.

Statik Problemsamling 5

LP 5.1



Frilägg kurvbågen från den vertikala stången!

Vi börjar med att i figuren sätta ut tyngdkraften, som antas vara mg. Masscentrums avstånd från stången $2r/\pi$, där r är radien, antas här vara känt. Vi har alltså infört två storheter r och m, som inte är givna.

Inför kontaktkrafterna! Vid B finns ingen friktionskraft.

Jämvikt fordrar att kraftsystemet på kurvbågen bildar ett *nollsystem*, dvs att kraftsumman är nollvektorn och kraftmomentet med avseende på någon punkt är nollvektorn:

$$\rightarrow: \quad N - N_1 = 0 \qquad (1)$$

$$\uparrow: \quad f - mg = 0 \qquad (2)$$

$$\curvearrowleft B: \quad mg \cdot \frac{2r}{\pi} - N \cdot 2r = 0 \qquad (3)$$

Ekv (2) och (3) ger

$$f = mg \qquad (4)$$

$$N = \frac{mg}{\pi} \qquad (5)$$

Friktionsvillkoret är

$$f \leq \mu N \qquad (6)$$

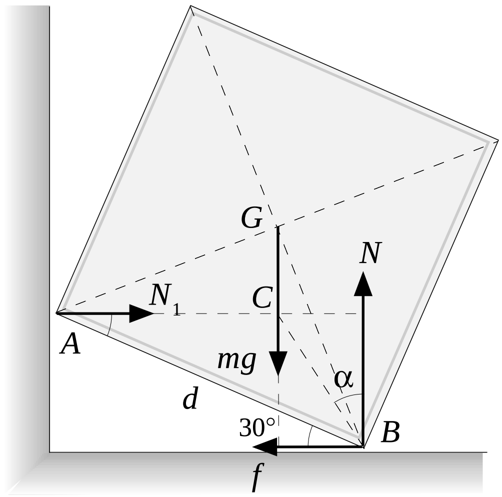
Insättning ger

$$mg \leq \mu \frac{mg}{\pi} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\mu \geq \pi}}$$

Svaret är dimensionsriktigt eftersom friktionstalet, som är ett förhållande mellan två krafter, har dimensionen 1 (är dimensionslöst).
Är friktionstalet μ orimligt stort? Även om μ i de flesta fall för någorlunda släta ytor oftast är mindre än 1, finns det ingen gräns för hur stort det kan vara. Problemet är ju också så formulerat att svaret ger vilket friktionstal som *krävs*, oberoende av om det finns så stora friktionstal eller inte.

Alternativ lösning: Kurvbågen är en trekraftskropp. Kraftsystemet måste vara ett strålkraftsystem. Verkningslinjen för kontaktkraften i A måste alltså gå genom punkten C (se figur!): $\quad (\tan\alpha =) \quad \dfrac{f}{N} = \dfrac{2r}{2r/\pi} = \pi$

LP 5.2



Frilägg kuben från den vertikala glatta väggen och det sträva golvet!

Vi börjar med att i figuren sätta ut tyngdkraften, som antas vara mg. Kubens kantlängd antas vara d. Vi har alltså infört två storheter d och m, som inte är givna i texten.

Inför kontaktkrafterna! Vid A finns ingen friktionskraft.

Jämvikt fordrar att kraftsystemet på kuben bildar ett *nollsystem*, dvs både kraftsumman och kraftmomentet med avseende på någon punkt är noll.

Vi betraktar gränsfallet mot glidning då lutningsvinkeln är $30°$. Vinkeln mellan linjen BG och horisontalplanet är då $30° + 45°$.

Jämvikt för den frilagda kuben fordrar:

$$\rightarrow: \quad N_1 - f = 0 \qquad (1)$$

$$\uparrow: \quad N - mg = 0 \qquad (2)$$

$$\curvearrowleft B: \quad mg \cdot \frac{d}{\sqrt{2}} \cos 75° - N_1 \cdot \frac{d}{2} = 0 \qquad (3)$$

Ekv (3) och (1) ger

$$f = \frac{2mg}{\sqrt{2}} \cos 75° \qquad (4)$$

Ekv (1) ger $\quad N = mg \qquad (5)$

Friktionsvillkoret är $\quad f \le \mu N \qquad (6)$

Vid gränsfallet mot glidning fås

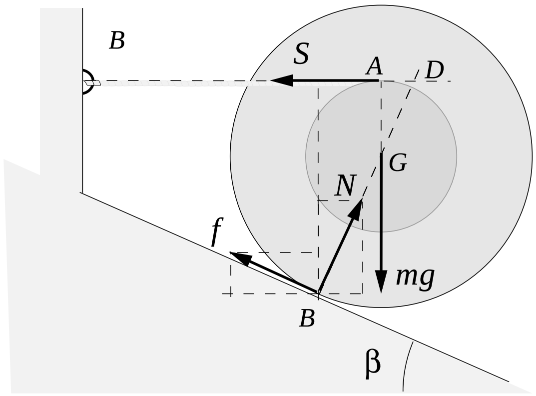
$$\frac{2mg}{\sqrt{2}} \cos 75° = \mu mg \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\mu = \sqrt{2} \cos 75°}}$$

Kommentar:
Svaret är dimensionsriktigt. En trigonometrisk funktion har dimensionen ett. Svarets närmevärde är $\mu \approx 0.36$ och verkar erfarenhetsmässigt rimligt?

Alternativ lösning: Kuben är en trekraftskropp. Kraftsystemet måste vara ett strålkraftsystem. Verkningslinjen för kontaktkraften i B måste alltså gå genom

punkten C (se figur!): $\quad (\tan \alpha =) \quad \dfrac{f}{N} = \dfrac{\frac{d}{\sqrt{2}} \cos 75}{\frac{d}{2}} = \sqrt{2} \cos 75$

LP 5.3



Frilägg kabelrullen från underlaget och kabeln! Inför motsvarande krafter f, N och S.

Jämvikt fordrar att kraftsystemet på kabelrullen bildar ett *nollsystem*, dvs både kraftsumman och kraftmomentet med avseende på någon punkt är noll.

Jämvikt för den frilagda kabelrullen fordrar:

$$\rightarrow: \quad -f\cos\beta + N\sin\beta - S = 0 \qquad (1)$$

$$\uparrow: \quad N\cos\beta + f\sin\beta - mg = 0 \qquad (2)$$

$$\circlearrowleft G: \quad S\cdot r - f\cdot R = 0 \qquad (3)$$

Ekv (3) ger

$$S = \frac{R}{r}f \qquad (4)$$

Insättning i ekv (1) ger

$$-f\cos\beta + N\sin\beta - \frac{R}{r}f = 0 \qquad (5)$$

$$\Rightarrow \quad N = \frac{R + r\cos\beta}{r\sin\beta}f \qquad (6)$$

Insättning i ekv (2) ger

$$\frac{\cos\beta}{\sin\beta}\left(\frac{R}{r} + \cos\beta\right)f + f\sin\beta = mg \qquad (7)$$

$$\Rightarrow \quad f = \frac{mgr\sin\beta}{r + R\cos\beta} \qquad (8)$$

$$\Rightarrow \quad N = \frac{R + r\cos\beta}{r + R\cos\beta}mg \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{S = \frac{mgR\sin\beta}{r + R\cos\beta}}}$$

Friktionsvillkoret är

$$f \le \mu N \qquad (9)$$

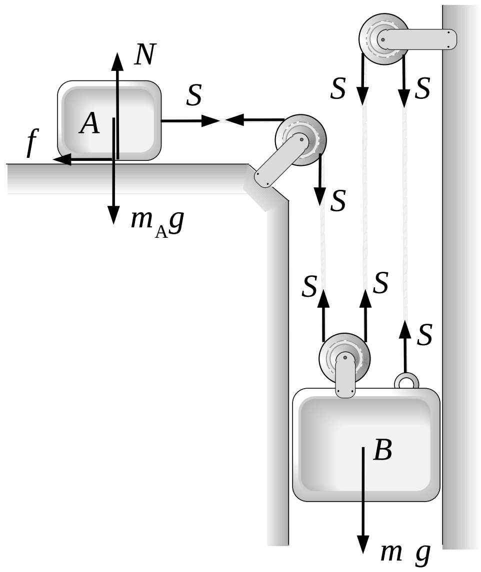
Vid gränsfallet mot glidning fås alltså

$$\frac{mgr\sin\beta}{r + R\cos\beta} \le \mu\frac{R + r\cos\beta}{r + R\cos\beta}mg$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\mu \ge \frac{r\sin\beta}{R + r\cos\beta}}}$$

Det finns andra sätt att lösa problemet. Tre momentekvationer med avseende på B, D och skärningspunkten till krafterna S och f ger krafterna utan att ett ekvationssystem behöver lösas. Observera att kontaktkraftens verkningslinje måste gå genom A. Det ger direkt friktionstalet!

LP 5.4



Frilägg kropparna från lina och kontaktytor! Inför motsvarande krafter S, f och N.

Trissorna är lätta och lättrörliga. Det betyder att trådkraften är lika på båda sidor om varje trissa. Det följer av momentekvationen med avseende på centrumaxeln för varje trissa.

Jämvikt för kropp B fordrar

$$\uparrow : \quad 3S - m_B g = 0 \qquad (1)$$

$$\Rightarrow \quad S = \frac{m_B g}{3}$$

Jämvikt för kropp A fordrar

$$\rightarrow : \quad S - f = 0 \qquad (2)$$

$$\uparrow : \quad N - m_A g = 0 \qquad (3)$$

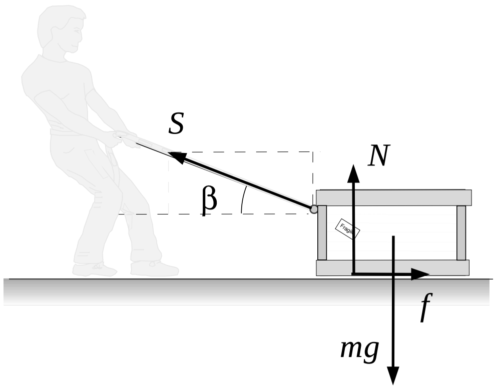
$$\Rightarrow \quad f = \frac{m_B g}{3} \quad \text{och} \quad N = m_A g$$

Friktionsvillkoret är $\quad f \leq \mu N \qquad (4)$

Vid gränsfallet mot glidning fås alltså

$$\frac{m_B g}{3} \leq \mu m_A g \qquad \Rightarrow \qquad \underline{\underline{\mu \geq \frac{m_B}{3m_A}}}$$

LP 5.5



Frilägg lådan från rep och kontaktyta!
Inför motsvarande krafter S, f och N.

Jämvikt för lådan fordrar

$$\rightarrow : \quad -S\cos\beta + f = 0 \qquad (1)$$

$$\uparrow : \quad S\sin\beta + N - mg = 0 \qquad (2)$$

Vid glidning är friktionskraften fullt utbildad (maximal)

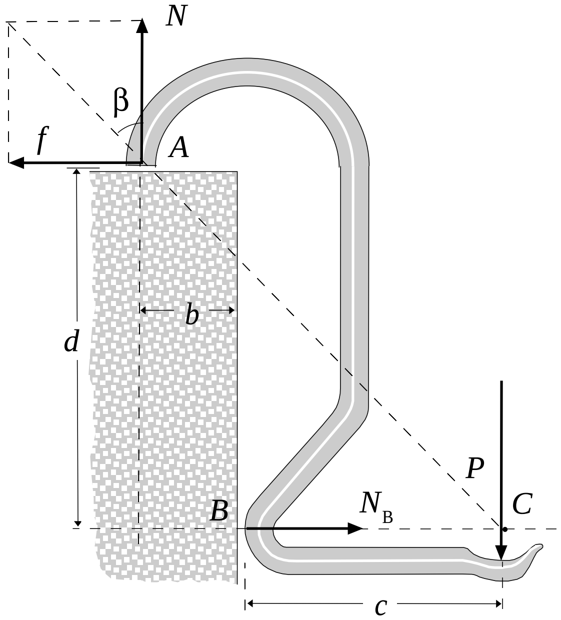
$$f = \mu N \qquad (3)$$

Sätt in detta i ekv (1). För att bestämma kraften S eliminerar vi sedan N genom att multiplicera ekv (1) med μ och dra den från ekv (2):

$$\left.\begin{aligned} -S\cos\beta + \mu N &= 0 \\ \mu S\sin\beta + \mu N - \mu mg &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \mu S\sin\beta + S\cos\beta - \mu mg = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \underline{\underline{S = \frac{\mu mg}{\mu\sin\beta + \cos\beta}}}$$

LP 5.6



Frilägg hållaren från kontaktytorna!
Inför motsvarande krafter N, f och N_B.
Hållaren antas vara lätt jämfört med tyngden P.

Jämvikt för hållaren fordrar

$$\rightarrow : \quad N_B - f = 0 \qquad (1)$$

$$\uparrow : \quad N - P = 0 \qquad (2)$$

$$\curvearrowleft A: \quad N_B \cdot d - P \cdot (b + c) = 0 \qquad (3)$$

Detta betyder att

$$N = P \qquad (4)$$

$$f = \frac{b+c}{d} P \qquad (5)$$

Friktionsvillkoret är $\quad f \le \mu N \qquad (6)$

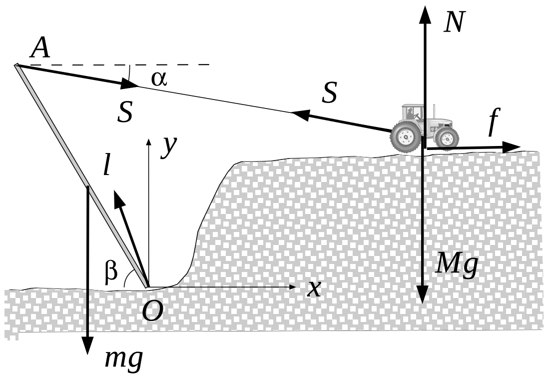
Vid gränsfallet mot glidning fås alltså

$$\frac{b+c}{d} P \le \mu P \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\mu \ge \frac{b+c}{d}}}$$

Kommentar: Hållaren är en trekraftskropp. Kontaktkraften i A måste ha en verkningslinje som går genom C. Det ger en geometrisk lösning för gränsfallet mot glidning:

$$\mu = \frac{f}{N} = \tan \beta = \frac{b+c}{d}$$

LP 5.7



Frilägg både traktorn och stången! Jämvikt fordrar att resultanten till hela kraftsystemet på varje kropp med avseende på vilken punkt som helst är nollvektorn:

$$\mathbf{F} = \mathbf{0}; \quad \mathbf{M} = \mathbf{0} \tag{1}$$

Detta problem är plant och då kan villkoret för varje kropp skrivas:

$$\begin{cases} F_x = 0 \\ F_y = 0 \\ M_z = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Dela upp kraften S i en horisontell och en vertikal komponent.

Stången $\quad \circlearrowleft O: \quad S\sin\alpha \cdot l\cos\beta - S\cos\alpha \cdot l\sin\beta + mg\cdot\frac{l}{2}\cos\beta = 0 \qquad (3)$

$$\Rightarrow \quad S = \frac{mg\cos\beta}{2\sin(\beta-\alpha)} \tag{4}$$

Den dragkraften måste traktorn klara av att ge.

Traktorn $\quad \rightarrow : \quad f - S\cos\alpha = 0 \qquad (5)$

$$\uparrow : \quad N - Mg + S\sin\alpha = 0 \tag{6}$$

Den maximala friktionskraften är $f = \mu N \qquad (7)$

Ekv(6) ger $\qquad N = Mg - S\sin\alpha \qquad (8)$

Ekv(5) ger $\qquad f = S\cos\alpha \qquad (9)$

Om resultatet (4) sätts in får vi

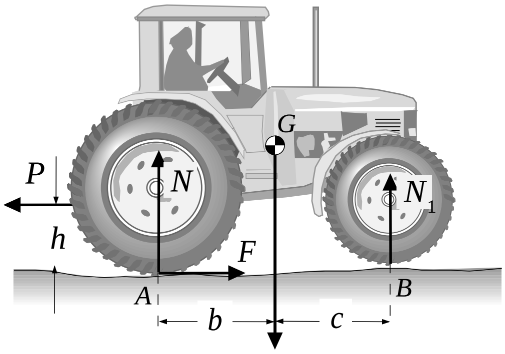
$$N = Mg - \frac{mg\cos\beta\sin\alpha}{2\sin(\beta-\alpha)} \qquad f = \frac{mg\cos\beta\cos\alpha}{2\sin(\beta-\alpha)}$$

Insättning i (7) ger

$$\mu = \frac{f}{N} = \frac{mg\cos\beta\cos\alpha}{2\sin(\beta-\alpha)Mg - mg\cos\beta\sin\alpha}$$

$$\Rightarrow \qquad \underline{\underline{\mu = \frac{m\cos\beta\cos\alpha}{2M\sin(\beta-\alpha) - m\cos\beta\sin\alpha}}}$$

LP 5.8



Traktorn har konstant hastighet så att den befinner sig i jämvikt. Vi frilägger den först från underlaget och inför motsvarande kontaktkrafter.

Friktionskraften vid framhjulen är noll. Hjulet rullar ju fritt och kraftmomentet med avseende på ett framhjuls axel skulle annars inte vara noll.

Friktionskraften vid bakhjulen är inte noll. Kraftmomentet med avseende på ett bakhjuls blir noll eftersom det också finns ett drivande kraftparsmoment vid axeln.

Jämvikt fordrar att resultanten till hela kraftsystemet på traktorn med avseende på vilken punkt som helst är nollvektorn:

$$\mathbf{F} = \mathbf{0}; \quad \mathbf{M} = \mathbf{0} \tag{1}$$

Detta problem är plant och då kan villkoret för kroppen skrivas:

$$\begin{cases} F_x = 0 \\ F_y = 0 \\ M_z = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Insättning ger

$$\rightarrow: \quad f - P = 0 \tag{3}$$

$$\uparrow: \quad N + N_1 - mg = 0 \tag{4}$$

$$\curvearrowleft A: \quad N_1 \cdot (b + c) - mg \cdot b + P \cdot h = 0 \tag{5}$$

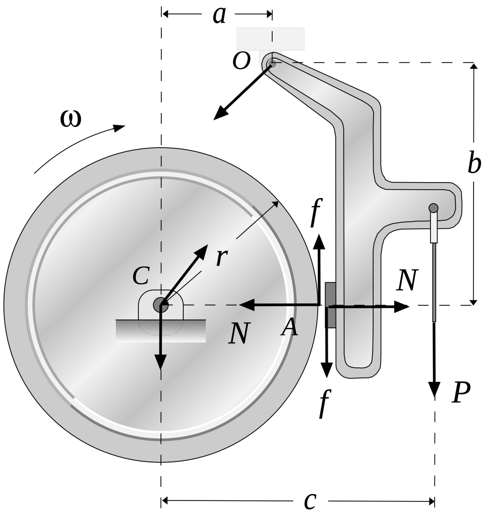
Ekv (5) ger $\quad \underline{\underline{N_1 = \dfrac{mgb - Ph}{b + c}}} \qquad N_1 \approx 21 \text{ kN}$

Ekvation (4) ger normalkraften på bakhjulen

$$\underline{\underline{N = \frac{mgc + Ph}{b + c}}} \qquad N \approx 19 \text{ kN}$$

Men varför är friktionstalet givet? Jo, man kan kontrollera att friktionskraften verkligen kan matcha kraften P. Den maximala friktionskraften är $f = \mu N \approx 10$ kN så att traktorn klarar verkligen att dra lasten.

LP 5.11



Antag att cylindern roterar medurs. Observera att friktionskraften som krävs är f. Den är alltså given och får ingå i svaret.

Frilägg armen! Jämvikt fordrar att resultanten till hela kraftsystemet på armen med avseende på vilken punkt som helst är nollvektorn:

$$\mathbf{F} = \mathbf{0}; \quad \mathbf{M} = \mathbf{0} \tag{1}$$

Detta problem är plant och då kan villkoret för kroppen skrivas:

$$\begin{cases} F_x = 0 \\ F_y = 0 \\ M_z = 0 \end{cases} \tag{2}$$

I O finns en reaktionskraft som ej efterfrågas. Egentligen söker vi bara en enda kraft, dragkraften P. Enda sättet att eliminera kraften i O från räkningarna är att ställa upp momentekvationen med avseende på en axel genom denna punkt:

$$\text{armen } OA \qquad \circlearrowleft O \ : \quad N \cdot b - f \cdot (r-a) - P \cdot (c-a) = 0 \tag{3}$$

Vi utnyttjar nu också att friktionskraften är fullt utbildad vid glidning $f = \mu N$, eller eftersom kraften f är känd, $N = f/\mu$.

Insättning ger

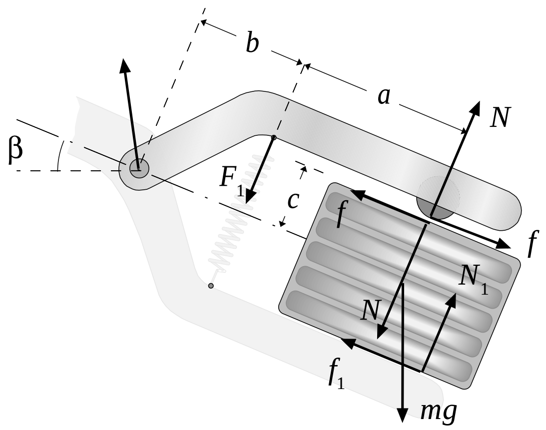
$$\frac{f}{\mu} \cdot b - f \cdot (r-a) = P \cdot (c-a) \qquad \Rightarrow \tag{4}$$

$$P = \frac{b - \mu(r-a)}{\mu(c-a)} f \tag{5}$$

Men cylinderns rotationsriktning är inte känd. Om den roterar moturs skulle friktionskraften ha motsatt riktning. Tecknet framför mittentermen $f \cdot (r-a)$ i ekv(3) skulle då vara plus. Ett fullständigt svar är

$$\underline{\underline{P = \frac{b \pm \mu(r-a)}{\mu(c-a)} f}} \qquad \text{plustecken gäller moturs rotation}$$

LP 5.12



Frilägg vinkelarmen och lådan och inför motsvarande kontaktkrafter! Jämvikt fordrar att resultanten till hela kraftsystemet på varje kropp med avseende på vilken punkt som helst är nollvektorn:

$$\mathbf{F} = \mathbf{0}; \quad \mathbf{M} = \mathbf{0} \qquad (1)$$

Detta problem är plant och då kan villkoret för varje kropp skrivas:

$$\begin{cases} F_x = 0 \\ F_y = 0 \\ M_z = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

För armen ställer vi bara upp momentekvationen med avseende på B, eftersom den ointressanta reaktionskraften i B kommer att ingå i alla andra jämviktsekvationer.

Armen $\quad \circlearrowleft B: \quad N(b+a) - f \cdot c - F_1 \cdot b = 0 \qquad (3)$

Lådan $\quad \nearrow: \quad N_1 - N - mg\cos\beta = 0 \qquad (4)$

$\nwarrow: \quad f_1 + f - mg\sin\beta = 0 \qquad (5)$

Friktionsvillkoren är $f \le \mu N$ och $f_1 \le \mu N_1$.

Vid gränsfallet mot glidning gäller $f = \mu N$ och $f_1 = \mu N_1 \qquad (6)$

Insättning i ekv (5) ger $\quad \mu N_1 + \mu N - mg\sin\beta = 0 \qquad (7)$

Multiplicera ekv (4) med $-\mu$! $\quad -\mu N_1 + \mu N + mg\mu\cos\beta = 0 \qquad (8)$

Addera ekv (7) och (8)!

Resultatet är $\quad 2\mu N - mg\sin\beta + mg\mu\cos\beta = 0$

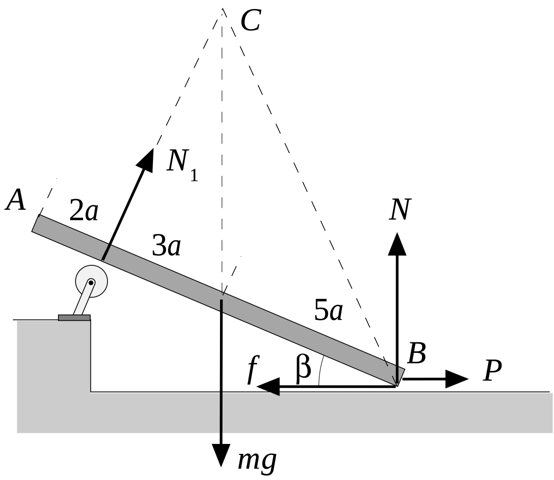
$$N = \frac{\sin\beta - \mu\cos\beta}{2\mu} mg \quad f = \mu N = \frac{\sin\beta - \mu\cos\beta}{2} mg$$

Insättning i ekv (3) ger

$$F_1 = \frac{c}{b} f - \frac{b+a}{b} N \quad F_1 = \frac{\sin\beta - \mu\cos\beta}{2b} mgc - \frac{\sin\beta - \mu\cos\beta}{2\mu b} mg(b+a)$$

$$F_1 = \frac{mg}{2\mu b}(a+b-\mu c)(\mu\cos\beta - \sin\beta)$$

LP 5.15



Frilägg skivan från trissa och underlag!

Skivans tyngd är mg. Vid kontaktytan mot den lättrörliga trissan finns bara en normalkraft N_1. Vid B verkar både kontaktkraften och dragkraften P. Vi utgår från att denna dragkraft är riktad åt höger.

Jämvikt för den frilagda skivan fordrar:

$$\rightarrow: \quad P - f + N_1 \sin\beta = 0 \qquad (1)$$

$$\uparrow: \quad N + N_1 \cos\beta - mg = 0 \qquad (2)$$

$$\curvearrowleft B: \quad mg \cdot 5a \cos\beta - N_1 \cdot 8a = 0 \qquad (3)$$

Ekv (3) ger normalkraften $\quad N_1 = \dfrac{5}{8} mg \cos\beta \qquad (4)$

Ekv (2) ger då normalkraften $\quad N = \left(1 - \dfrac{5}{8}\cos^2\beta\right) mg \qquad (5)$

Ekv (1) ger då friktionskraften $\quad f = P + \dfrac{5}{8} mg \sin\beta \cos\beta \qquad (6)$

Vid gränsfallet mot glidning är friktionskraften maximal, dvs

$$f = f_{\max} = \mu N = \mu\left(1 - \frac{5}{8}\cos^2\beta\right) mg \qquad (7)$$

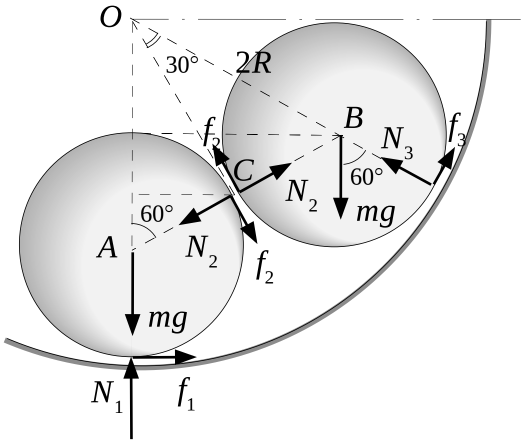
Vid jämvikt måste denna friktionskraft vara den som ges av ekv (6). Det ger ekvationen

$$P + \frac{5}{8} mg \sin\beta \cos\beta = \mu\left(1 - \frac{5}{8}\cos^2\beta\right) mg \qquad (8)$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{P = \left[\mu\left(1 - \frac{5}{8}\cos^2\beta\right) - \frac{5}{8}\sin\beta\cos\beta\right] mg}}$$

Kommentar:
Vi har här utgått från att det verkligen krävs en kraft P *åt höger* för att skivan ska börja röra sig. Det betyder att vi förutsätter att friktionstalet μ är tillräckligt stort. Det minsta friktionstal för vilket lösningen gäller är det värde som ger $P = 0$ i svaret. Om friktionstalet är mindre krävs ju en yttre kraft åt vänster för att skivan ska vara i jämvikt. Ökas denna kraft åt vänster så störs jämvikten vid ett annat värde på den yttre kraften.

LP 5.19



Frilägg kloten! De två tyngdkrafterna balanseras vid jämvikt av de tre kontaktkrafterna. Vid kontaktstället C mellan de båda kloten utnyttjas Newtons tredje lag, lagen om verkan och motverkan.

Antalet obekanta krafter är sex, dvs lika många som antalet jämviktsekvationer som kan ställas upp.
Dessutom söker vi det speciella friktionstal som gör att jämvikten störs av att glidning inträffar. Denna obekanta storhet ges av friktionsvillkoret.
Vi gör här för övningens skull en lösning med enbart momentekvationer.

Jämvikt för det frilagda systemet fordrar:

Undre klotet: $\curvearrowleft A$: $f_1 \cdot R - f_2 \cdot R = 0$ (1)

Övre klotet: $\curvearrowleft B$: $f_3 \cdot R - f_2 \cdot R = 0$ (2)

Dessa ekvationer ger att friktionskrafterna är lika stora och vi kan därför släppa index i den följande lösningen:

$$f_1 = f_2 = f_3 \equiv f \qquad (3)$$

Hela systemet $\curvearrowleft O$: $f_1 \cdot 3R + f_3 \cdot 3R - mg \cdot R\sqrt{3} = 0$ (4)

$$\Rightarrow \quad f = \frac{\sqrt{3}}{6}mg \qquad (5)$$

Undre klotet: $\curvearrowleft C$: $(mg - N_1) \cdot \dfrac{R\sqrt{3}}{2} + f_1 \cdot \dfrac{3R}{2} = 0$ (6)

Övre klotet: $\curvearrowleft O$: $(-mg + N_2) \cdot R\sqrt{3} + f_3 \cdot 3R = 0$ (7)

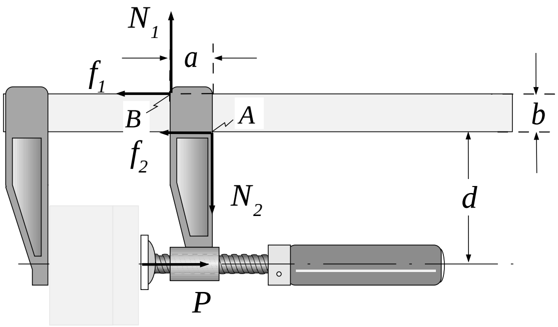
Övre klotet: $\curvearrowleft C$: $(-mg + N_3) \cdot \dfrac{R\sqrt{3}}{2} + f_3 \cdot \dfrac{3R}{2} = 0$ (8)

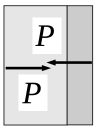
Ekv (6) och (5) ger $\quad N_1 = \dfrac{3}{2}mg$

Ekv (7) och (8), som ser likadana ut ger $\quad N_2 = \dfrac{1}{2}mg \qquad N_3 = \dfrac{1}{2}mg$

Friktionsvillkoret är $|\mathbf{f}| \le \mu|\mathbf{N}|$. Vid jämvikt måste villkoret gälla vid alla kontaktställen. Eftersom friktionskrafterna är lika stora här störs jämvikten lättast där normalkraften är minst:

LP 5.20





Frilägg den rörliga delen av tvingen! Den påverkas först av en lika stor kraft P som också pressar ihop det som skall limmas. Kraften vill vrida den frilagda kroppen så att kontakt med den andra fixa delen i första hand uppträder i A och B. Inför kontaktkrafterna i dessa punkter enligt figuren!

Jämvikt för den frilagda delen fordrar:

$$\rightarrow: \quad -f_1 + P - f_2 = 0 \qquad (1)$$

$$\uparrow: \quad N_1 - N_2 = 0 \qquad (2)$$

$$\curvearrowleft A: \quad P \cdot d - N_1 \cdot a + f_1 \cdot b = 0 \qquad (3)$$

Ekv (2) visar att normalkrafterna N_1 och N_2 är lika: $N_2 = N_1 \equiv N$
Vid fullt utbildad friktion måste friktionskrafterna alltså också vara lika stora:

$$f_1 = \mu N_1 \qquad f_2 = \mu N_2 \qquad \Rightarrow \qquad f_1 = f_2 \equiv f = \mu N$$

Om detta införes i (1) och (3) fås

$$P = 2f$$

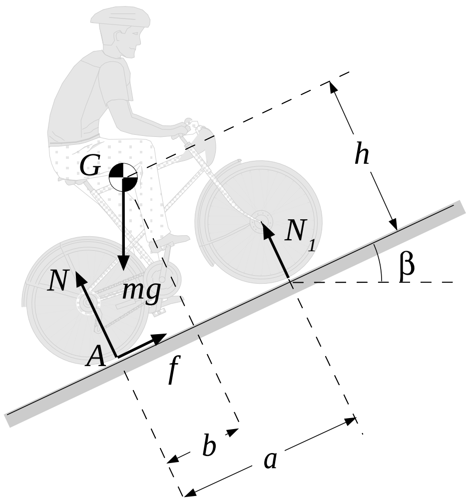
$$P \cdot d - Na + fb = 0 \qquad \Rightarrow P \cdot d - Na + \frac{P}{2} b = 0$$

Friktionsvillkoren är $f_1 \le \mu N_1$ och $f_2 \le \mu N_2$.

$$\mu \ge \frac{f}{N} \qquad \Rightarrow \qquad \mu \ge \frac{Pa}{2Pd + Pb} \qquad \Rightarrow \qquad \mu(2d + b) \ge a$$

$$\Rightarrow \qquad \underline{\underline{d \ge \frac{a}{2\mu} - \frac{b}{2}}}$$

LP 5.23



Jämvikt fordrar att resultanten till hela kraftsystemet på kroppen med avseende på vilken punkt som helst är nollvektorn:

$$\mathbf{F} = \mathbf{0}; \quad \mathbf{M} = \mathbf{0} \tag{1}$$

Detta problem är plant och då kan villkoret skrivas:

$$\begin{cases} F_x = 0 \\ F_y = 0 \\ M_z = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Om hela ekipaget friläggs från underlaget och motsvarande kontaktkrafter införs i figuren får vi ekvationssystemet

$$\nearrow: \quad f - mg\sin\beta = 0 \tag{3}$$

$$\nwarrow: \quad N + N_1 - mg\cos\beta = 0 \tag{4}$$

$$\curvearrowleft A: \quad N_1 \cdot a + mg\sin\beta \cdot h - mg\cos\beta \cdot b = 0 \tag{5}$$

Normalkrafterna och friktionskraften fås enkelt:

$$f = mg\sin\beta \tag{6}$$

$$N_1 = \frac{1}{a}(b\cos\beta - h\sin\beta)mg \tag{7}$$

$$N = \left[\left(1 - \frac{b}{a}\right)\cos\beta + \frac{h}{a}\sin\beta\right]mg \tag{8}$$

Friktionsvillkoret är $\quad f \leq \mu N \qquad (9)$

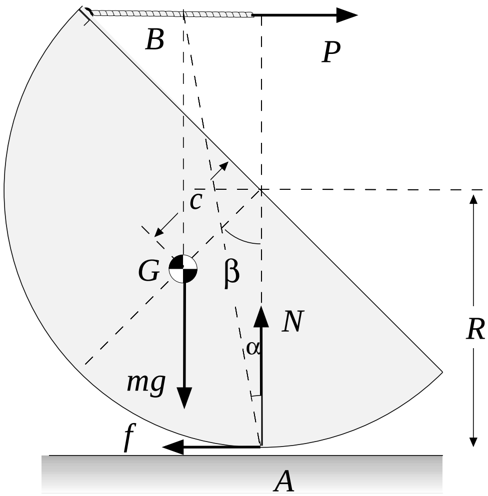
Vid gränsfallet mot glidning fås alltså

$$\frac{\sin\beta}{\left(1 - \frac{b}{a}\right)\cos\beta + \frac{h}{a}\sin\beta} = \mu \quad \Rightarrow \quad \tan\beta = \mu\left[\left(1 - \frac{b}{a}\right) + \frac{h}{a}\tan\beta\right]$$

$$(a - \mu h)\tan\beta = \mu(a - b) \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\tan\beta = \frac{\mu(a-b)}{a - \mu h}}}$$

Om b ökar minskar β.

LP 5.26



Jämvikt fordrar att resultanten till hela kraftsystemet på kroppen med avseende på vilken punkt som helst är nollvektorn:

$$\mathbf{F} = \mathbf{0}; \quad \mathbf{M} = \mathbf{0} \tag{1}$$

Detta problem är plant och då kan villkoret skrivas:

$$\begin{cases} F_x = 0 \\ F_y = 0 \\ M_z = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Om kroppen friläggs från underlaget och motsvarande kontaktkraft införs i figuren får vi ekvationssystemet

$$\rightarrow : \quad P - f = 0 \tag{3}$$

$$\uparrow : \quad N - mg = 0 \tag{4}$$

$$\curvearrowleft A : \quad mg\frac{4R}{3\pi}\sin\beta - P\left(R + R\sin\beta\right) = 0 \tag{5}$$

Kontaktkraftens komponenter fås alltså enkelt direkt ur (3) och (4):

$$f = P \tag{6}$$

$$N = mg \tag{7}$$

Vridningsvinkeln β bestäms ur (5): $\quad \sin\beta = \dfrac{3\pi P}{4mg - 3\pi P} \quad (8)$

Detta är vridningsvinkeln om friktionskraften klarar att balansera P.

Friktionsvillkoret är $\quad f \le \mu N \quad (9)$

Vid gränsfallet mot glidning fås alltså $\quad P = \mu mg$

$$\Rightarrow \qquad \underline{\underline{\sin\beta = \frac{3\pi\mu}{4 - 3\pi\mu}}}$$

Kommentar: Resultatet fås direkt om man inser att cylindern är en trekraftskropp. Kontaktkraftens verkningslinje måste alltså gå genom P. Geometrin ger då

$$\mu = \tan\alpha = \frac{3\pi\mu}{4 - 3\pi\mu}$$